EDHEC BUSINESS SCHOOL

CONCOURS PREMASTER EDHEC

SAMEDI 25 MARS 2023

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 5

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte 3 exercices

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

A l'issue de chaque composition écrite, tout candidat est tenu de remettre au surveillant une copie (même blanche, qui sera alors signée). Tout candidat sortant avant la fin des épreuves doit obligatoirement remettre le sujet en même temps que sa copie.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction I_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ I_n(x) = \int_0^1 (1 - xt^2)^n \, \mathrm{d}t$$

1) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ I_{n+1}(x) = \frac{(1-x)^{n+1}}{2n+3} + \frac{2n+2}{2n+3}\, I_n(x)$$

b) En déduire que $I_n(1) = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

2) Montrer, en utilisant la formule du binôme, que I_n est une fonction polynomiale de degré n dont on déterminera le coefficient de x^n.

3) Établir, en utilisant la question précédente, que pour tout réel x et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$x I_n'(x) = n\big(I_n(x) - I_{n-1}(x)\big)$$

Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \int_0^1 I_n(x) \mathrm{d}x$.

4) a) Utiliser la question 3) pour montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)U_n = nU_{n-1} + I_n(1)$$

b) En déduire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}$$

c) Montrer enfin que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n+1}{k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}$$

Exercice 2

Partie 1 : étude d'une matrice

On considère $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ comme des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ ou M^T la matrice transposée de M.

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et on pose $A = C\,{}^tC$ (ce que l'on peut aussi écrire $A = C\ C^T$). Par ailleurs, on note O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1) On rappelle que $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donner les valeurs de j^3 et $1 + j + j^2$.

2) a) Expliciter la matrice A, puis calculer A^2.

b) En déduire la seule valeur propre possible de A.

c) Déterminer le rang de A et en déduire son spectre.

d) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie 2 : étude d'un endomorphisme

On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ associe $\varphi(M) = AMA$.

3) a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b) Donner l'image de la matrice A par φ. Qu'en déduire concernant l'endomorphisme φ ?

4) Pour tout couple (k,ℓ) de $[\![1,3]\!]^2$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la k e ligne et de la ℓ e colonne, et on rappelle que la famille des 9 matrices $(E_{k,\ell})_{1\leq k,\ell\leq 3}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Pour tout k de $[\![1,3]\!]$, on note e_k l'élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé à la k-ième ligne qui vaut 1.

En admettant sans démonstration que, pour tout couple (k,ℓ) de $[\![1,3]\!]^2$, on a $E_{k,\ell} = e_k\, {}^t e_\ell$, montrer que :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,3]\!]^2,\ \varphi(E_{k,\ell}) = j^{k+\ell-2}A$$

5) a) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

b) Déduire des calculs faits à la question 4) une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

6) a) Montrer que φ n'a pas de valeur propre non nulle.

b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 3

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif et inférieur strictement à $\frac{1}{2}$.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a\,x^{1+\frac{1}{a}}} = \dfrac{1}{a} \times x^{-1-\frac{1}{a}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Partie 1 : étude de la loi de Pareto de paramètre a

1) Montrer que f peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre a et on note F la fonction de répartition de X.

2) a) Montrer que X possède une espérance et que celle-ci est donnée par $E(X) = \dfrac{1}{1-a}$.

b) Montrer que X possède une variance et la déterminer.

3) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et a selon que $x \geq 1$ ou $x < 1$.

4) a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$. On note μ la solution appelée médiane de X.

b) Étudier la fonction h définie sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ par $h(x) = 2^x(1-x)$.

c) Comparer $E(X)$ et μ.

5) On pose $Y = \ln X$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note G sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.

b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Partie 2 : estimation de a

On suppose que le paramètre a est inconnu et on souhaite en trouver un intervalle de confiance.
On considère pour cela n variables aléatoires $Y_1,...,Y_n$ toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y. On pose $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

6) a) Justifier que T_n est un estimateur de a.

b) L'estimateur T_n est-il sans biais de a ?

c) Montrer que T_n est un estimateur convergent de a.

7) a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable T_n.

b) En utilisant le fait que $0 < a < \frac{1}{2}$, donner un intervalle de confiance pour a au niveau de confiance 90% lorsque l'on choisit $n = 1000$.

Partie 3 : une convergence en loi

8) a) Soit h la fonction qui à tout réel x associe $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a\,x^{1+\frac{1}{a}}}\exp\left(-\dfrac{1}{x^{1/a}}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$.

Vérifier que h peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire Z.

b) On note H la fonction de répartition de Z. Déterminer $H(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \le 0$.

Dans la suite, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Z_n = \frac{1}{n^a}\max(X_1,...,X_n)$ et on admet que Z_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

9) a) Justifier que la fonction de répartition H_n de Z_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{n x^{1/a}}\right)^n & \text{si } x \ge \dfrac{1}{n^a} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{n^a} \end{cases}$$

b) Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $H_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est strictement supérieur à la partie entière de $\frac{1}{x^{1/a}}$, on a : $H_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n x^{1/a}}\right)^n$.

d) Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $H_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

e) Conclure finalement que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Z.

CONCOURS EDHEC

CONCOURS PRÉ MASTER

SAMEDI 25 MARS 2023

<u>ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES</u>

CORRIGÉ

Exercice 1

1) a) On pose $u'(t)=1$ et $v(t)=(1-xt^2)^{n+1}$ dans l'intégrale $I_{n+1}(x)$. On peut choisir $u(t)=t$ et on a $v'(t)=-2(n+1)xt(1-xt^2)^n$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et l'intégration par parties donne :

$I_{n+1}(x)=\left[t(1-xt^2)^{n+1}\right]_0^1+2(n+1)\int_0^1 xt^2(1-xt^2)^n\,\mathrm{d}t=(1-x)^{n+1}+2(n+1)\int_0^1 xt^2(1-xt^2)^n\,\mathrm{d}t$.

En calculant le crochet et en écrivant $xt^2=1-(1-xt^2)$, on obtient :

$$I_{n+1}(x)=(1-x)^{n+1}+2(n+1)\int_0^1\left(1-(1-xt^2)\right)(1-xt^2)^n\,\mathrm{d}t$$

En développant, puis par linéarité de l'intégration, on en déduit :

$$I_{n+1}(x)=(1-x)^{n+1}+2(n+1)\left(\int_0^1(1-xt^2)^n\,\mathrm{d}t-\int_0^1(1-xt^2)^{n+1}\,\mathrm{d}t\right)$$

On a donc $I_{n+1}(x)=(1-x)^{n+1}+2(n+1)\left(I_n(x)-I_{n+1}(x)\right)$, d'où :

$$(2n+3)I_{n+1}(x)=(1-x)^{n+1}+(2n+2)I_n(x)$$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ I_{n+1}(x)=\frac{(1-x)^{n+1}}{2n+3}+\frac{2n+2}{2n+3}I_n(x)}$$

1) b) En évaluant en 1, on obtient : $I_{n+1}(1)=\dfrac{2n+2}{2n+3}I_n(1)$. On procède alors par récurrence pour montrer que $I_n(1)=\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

- Pour $n=0$, on a $I_0(1)=\int_0^1(1-t^2)^0\,\mathrm{d}t=\int_0^1 1\mathrm{d}t=1$ et $\dfrac{4^0(0!)^2}{(2\times0+1)!}=1$ donc on a bien

$I_0(1)=\dfrac{4^0(0!)^2}{(2\times0+1)!}$.

- Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $I_n(1)=\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$, alors on a successivement :

$I_{n+1}(1)=\dfrac{2n+2}{2n+3}I_n(1)=\dfrac{2n+2}{2n+3}\times\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}=\dfrac{2n+2}{2n+3}\times\dfrac{2n+2}{2n+2}\times\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

$I_{n+1}(1)=4(n+1)^2\times\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+3)!}=\dfrac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n+3)!}$.

- On a donc montré que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ I_n(1)=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

2) La formule du binôme s'écrit : $(1-xt^2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-xt^2)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k t^{2k}$.

Par linéarité de l'intégration, on en déduit : $I_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k\int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k\left[\dfrac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1$.

On peut conclure :

$$I_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^k$$

Ceci montre que I_n est une fonction polynomiale de degré n dont le coefficient de x^n est $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

3) Comme demandé, on utilise la question précédente après avoir montré, en revenant aux factorielles, la formule $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ valable pour $k\geq 1$. On obtient alors, en remarquant que le terme d'indice 0 de $I_n(x)$ a une dérivée nulle :

$$xI_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}k\,x^k=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^k$$

Avec la formule de Pascal, on obtient :

$$xI_n'(x)=n\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k}\right)\frac{(-1)^k}{2k+1}x^k$$

En scindant la somme, on trouve $xI_n'(x)=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^k-n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^k$ et en enlevant le terme d'indice n de la deuxième somme (il est nul), on obtient :

$$xI_n'(x)=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^k-n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^k$$

On peut ajouter dans chaque somme les termes d'indice 0 qui sont égaux à 1 (et se neutralisent) :

$$xI_n'(x)=n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^k-n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^k=nI_n(x)-nI_{n-1}(x)$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ xI_n'(x)=n\left(I_n(x)-I_{n-1}(x)\right)}$$

4) a) Dans l'intégrale définissant $U_n=\int_0^1 I_n(x)\,\mathrm{d}x$, on pose $u'(x)=1$ et $v(x)=I_n(x)$. On peut choisir $u(x)=x$ et on a $v'(x)=I_n'(x)$. Les fonctions u et v sont polynomiales donc de classe C^1 sur $[0,1]$ et l'intégration par parties donne :

$$U_n=\left[xI_n(x)\right]_0^1-\int_0^1 xI_n'(x)\,\mathrm{d}x$$

Avec la question précédente, on obtient :

$$U_n=I_n(1)-n\int_0^1\left(I_n(x)-I_{n-1}(x)\right)\mathrm{d}x=I_n(1)-n\left(U_n-U_{n-1}\right)$$

On a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (n+1)U_n=nU_{n-1}+I_n(1)}$$

4) b) On écrit la relation précédente $(k+1)U_k-kU_{k-1}=I_k(1)$ puis on somme pour k allant de 1 à n (pour $n\in\mathbb{N}^*$), ce qui donne par télescopage :

$$(n+1)U_n-U_0=\sum_{k=1}^{n}I_k(1)$$

Comme $I_0(1)=1=U_0$, on en déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (n+1)U_n=\sum_{k=0}^{n}I_k(1)$$

Cette relation reste valable pour $n=0$ (elle donne $U_0=I_0(1)$) et on conclut grâce à la question 1b) :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ U_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k\,(k!)^2}{(2k+1)!}}$$

Remarque. On aurait pu faire une récurrence grâce à la relation obtenue à la question 4a).

4) c) En utilisant le résultat de la question 2), on a :

$$U_n=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^k\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}\int_0^1 x^k\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}\times\frac{1}{k+1}$$

Il faut savoir prouver que $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$, ce qui permet de trouver :

$$U_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Comme $U_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k\,(k!)^2}{(2k+1)!}$ d'après la question 4b), on a finalement :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k\,(k!)^2}{(2k+1)!}$$

En multipliant par $n+1$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n+1}{k+1}}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k\,(k!)^2}{(2k+1)!}}$$

Exercice 2

1) On trouve (ou on sait !) que $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$.

2) a) Comme $C\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et ${}^tC\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$, alors $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et après calculs, on obtient :

$$A=\begin{pmatrix}1 & j & j^2\\ j & j^2 & 1\\ j^2 & 1 & j\end{pmatrix}$$

On en déduit $A^2=\begin{pmatrix}1 & j & j^2\\ j & j^2 & 1\\ j^2 & 1 & j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & j & j^2\\ j & j^2 & 1\\ j^2 & 1 & j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+j^2+j^4 & j+j^3+j^2 & j^2+j+j^3\\ j+j^3+j^2 & j^2+j^4+1 & j^3+j^2+j\\ j^2+j+j^3 & j^3+j^2+j & j^4+1+j^2\end{pmatrix}$.

Grâce aux relations $j^3=1$ (d'où $j^4=j$) et $1+j+j^2=0$, on trouve : $A^2=0_3$.

2) b) Le polynôme X^2 est annulateur de A et sa seule racine est 0 donc la seule valeur propre possible de A est 0.

2) c) En notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, on voit, toujours grâce à la relation $j^3=1$, que $C_2=jC_1$, $C_3=j^2C_1$ et comme C_1 n'est pas la colonne nulle, on peut conclure : $\mathrm{rg}(A)=1$.

Ceci prouve que A n'est pas inversible donc que 0 est effectivement valeur propre de A. Comme c'est la seule possible, on a : $\operatorname{sp}(A)=\{0\}$.

2) d) Pour que A soit diagonalisable, il faudrait que son seul sous-espace propre soit de dimension 3 or il n'est que de dimension 2 (étant donné que $\operatorname{rg}(A)=1$) donc A n'est pas diagonalisable.
Remarque. On pouvait raisonner par l'absurde.

3) a) • Le produit de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donc $\varphi(M)$ appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
• Si l'on prend deux matrices M et N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et un complexe λ, on a $\varphi(M+\lambda N)=A(M+\lambda N)A$, et par propriété du produit matriciel, on obtient :

$$\varphi(M+\lambda N)=AMA+\lambda ANA=\varphi(M)+\lambda\varphi(N)$$

Les deux points précédents montrent que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

3) b) On a $\varphi(A)=A^3=A^2A$ et comme $A^2=0_3$, on peut conclure : $\varphi(A)=0_3$.
La matrice A n'est pas nulle et appartient au noyau de φ donc φ n'est pas injectif.

4) Il est facile de vérifier que $E_{k,\ell}=e_k\,{}^te_\ell$ mais ce n'est pas demandé.
Ensuite on a :
$\varphi(E_{k,\ell})=AE_{k,\ell}A=C\,{}^tC\,e_k\,{}^te_\ell\,C\,{}^tC=C({}^tCe_k)({}^te_\ell\,C)\,{}^tC=C(j^{k-1})(j^{\ell-1})\,{}^tC=j^{k-1}j^{\ell-1}C\,{}^tC$.
On trouve donc :

$$\boxed{\varphi(E_{k,\ell})=j^{k+\ell-2}A}$$

5) a) On sait que $\operatorname{Im}(\varphi)$ est engendré par la famille des images par φ des vecteurs de la base $(E_{k,\ell})_{1\le k,\ell\le 3}$ et on constate, grâce à la question 4), que :

$$\operatorname{Im}(\varphi)=\operatorname{Vect}(A)$$

Comme A n'est pas nulle, on en déduit que $\operatorname{rg}(\varphi)=1$ et comme $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{C}))=9$, le théorème du rang permet de conclure :

$$\dim(\operatorname{Ker}(\varphi))=8$$

5) b) On va utiliser le calcul fait à la question 4) pour trouver une base de 8 matrices de $\operatorname{Ker}(\varphi)$.
Comme $\varphi(E_{1,1})=A$, on en déduit, par linéarité de φ :
$\varphi(E_{1,2}-jE_{1,1})=\varphi(E_{2,1}-jE_{1,1})=0_3$ car $\varphi(E_{1,2})=\varphi(E_{2,1})=jA$.
$\varphi(E_{1,3}-j^2E_{1,1})=\varphi(E_{3,1}-j^2E_{1,1})=0_3$ car $\varphi(E_{1,3})=\varphi(E_{3,1})=j^2A$.
$\varphi(E_{2,3}-E_{1,1})=\varphi(E_{3,2}-E_{1,1})=0_3$ car $\varphi(E_{2,3})=\varphi(E_{3,2})=A$.
$\varphi(E_{2,2}-j^2E_{1,1})=\varphi(E_{3,3}-jE_{1,1})=0_3$ car $\varphi(E_{2,2})=j^2A$ et $\varphi(E_{3,3})=jA$
Les matrices $B_1=E_{1,2}-jE_{1,1}$, $B_2=E_{2,1}-jE_{1,1}$, $B_3=E_{1,3}-j^2E_{1,1}$, $B_4=E_{3,1}-j^2E_{1,1}$, $B_5=E_{2,3}-E_{1,1}$, $B_6=E_{3,2}-E_{1,1}$, $B_7=E_{2,2}-j^2E_{1,1}$, $B_8=E_{3,3}-jE_{1,1}$ forment une famille libre (conséquence de la liberté de la famille $(E_{k,\ell})_{1\le k,\ell\le 3}$), et ainsi, la famille $(B_1,\dots,B_8)$ est une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$.

6) a) On a, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\varphi^2(M) = A(AMA)A = A^2MA^2 = 0_3$, car $A^2 = 0_3$.
Ceci prouve que $\varphi^2 = 0$ et ainsi le polynôme X^2 est annulateur de φ. Sa seule racine étant 0, on en conclut que 0 est la seule valeur propre possible de φ, et comme φ n'est pas injectif, ceci veut dire que φ admet 0 comme seule valeur propre donc que φ n'a pas de valeur propre non nulle.

6) b) Si φ était diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait la matrice diagonale nulle, donc φ serait l'endomorphisme nul, ce qui n'est pas le cas puisque $\dim \operatorname{Ker}(\varphi) = 8 \neq 9$. Par conséquent, φ n'est pas diagonalisable.

Exercice 3

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

1) • La fonction f est positive sur $]-\infty, 1[$ car elle y est nulle, elle est bien définie et positive sur $[1, +\infty[$ comme inverse d'une fonction strictement positive (car a est strictement positif et sur $[1, +\infty[$, on a $x^{1+\frac{1}{a}} \geq 1 > 0$).

• La fonction f est continue sur $]-\infty, 1[$ car elle y est nulle, elle est aussi continue sur $]1, +\infty[$ comme inverse d'une fonction puissance continue (avec dénominateur non nul), ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 1.

• $\int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ car f est nulle sur $]-\infty, 1[$.

L'intégrale $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.

Pour tout $x \geq 1$, on a : $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{a t^{1+\frac{1}{a}}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_1^x t^{-1-\frac{1}{a}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\left[\frac{t^{-\frac{1}{a}}}{-\frac{1}{a}}\right]_1^x = -x^{-\frac{1}{a}} + 1$.

Comme $-\frac{1}{a} < 0$, on a $\lim_{x \to +\infty} x^{-\frac{1}{a}} = 0$ donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, après passage à la limite, on trouve $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Finalement, on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
Les trois points précédents permettent de conclure que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire Y.

2) a) Calcul de $E(X)$.

• Tout d'abord, on a $\int_{-\infty}^{1} t\, f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ car f est nulle sur $]-\infty, 1[$.

• Pour tout $x \geq 1$, on a :

$$\int_1^x t\, f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{a t^{\frac{1}{a}}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_1^x t^{-\frac{1}{a}}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit : $\int_1^x t\, f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\downarrow}{\overset{a\neq 1}{=}} \frac{1}{a}\left[\frac{t^{-\frac{1}{a}+1}}{-\frac{1}{a}+1}\right]_1^x = \frac{1}{a-1}\left[t^{-\frac{1}{a}+1}\right]_1^x = \frac{1}{a-1}\left(x^{1-\frac{1}{a}} - 1\right)$.

Comme $0<a<\frac{1}{2}$, on a $\frac{1}{a}>2$ donc $1-\frac{1}{a}<-1<0$ et ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-\frac{1}{a}}=0$.

Par conséquent, $\int_1^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument (fonction positive) et, après passage à la limite, on a :

$$\int_1^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{-1}{a-1}=\frac{1}{1-a}$$

Les deux points précédents prouvent que l'espérance de X existe et que :

$$\boxed{E(X)=\frac{1}{1-a}}$$

2) b) Calcul de $E(X^2)$.

- Tout d'abord, on a $\int_{-\infty}^1 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t=0$ car f est nulle sur $]-\infty,1[$.
- Pour tout $x\geq 1$, on a :

$$\int_1^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x \frac{1}{a t^{\frac{1}{a}-1}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int_1^x t^{1-\frac{1}{a}}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit : $\int_1^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\substack{a\neq 1/2\\ \downarrow}}{=} \frac{1}{a}\left[\frac{t^{2-\frac{1}{a}}}{2-\frac{1}{a}}\right]_1^x=\frac{1}{2a-1}\left[t^{2-\frac{1}{a}}\right]_1^x=\frac{1}{2a-1}\left(x^{2-\frac{1}{a}}-1\right)$

Comme $0<a<\frac{1}{2}$, on a $\frac{1}{a}>2$ donc $2-\frac{1}{a}<0$ et ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2-\frac{1}{a}}=0$.

Par conséquent, $\int_1^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (absolument) et, après passage à la limite, on a :

$$\int_1^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{-1}{2a-1}=\frac{1}{1-2a}$$

Les deux points précédents prouvent que le moment d'ordre 2 de X existe et que :

$$E(X^2)=\frac{1}{1-2a}$$

La formule de Koenig-Huygens s'écrit : $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$. On a alors :

$$V(X)=\frac{1}{1-2a}-\frac{1}{(1-a)^2}=\frac{(1-a)^2-(1-2a)}{(1-2a)(1-a)^2}$$

En simplifiant :

$$\boxed{V(X)=\frac{a^2}{(1-2a)(1-a)^2}}$$

3) Par définition, on a : $F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

- $\forall x<1,\ F(x)=\int_{-\infty}^x 0\,\mathrm{d}t=0$.
- $\forall x\geq 1,\ F(x)=\int_{-\infty}^1 0\,\mathrm{d}t+\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=1-x^{-\frac{1}{a}}=1-\frac{1}{x^{\frac{1}{a}}}$ (d'après le calcul fait à la première question).

Bilan :

$$\boxed{F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{a}}} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}}$$

4) a) Comme F est nulle sur $]-\infty,1[$, l'équation $F(x)=\dfrac{1}{2}$ n'a pas de solution sur $]-\infty,1[$.

Sur $[1,+\infty[$, on a :

$$F(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x^{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{x^{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^{\frac{1}{a}}=2$$

Comme la fonction $t\mapsto t^a$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$, on obtient :

$$F(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=2^a$$

Conclusion : la seule solution de l'équation $F(x)=\dfrac{1}{2}$ est $\mu=2^a$.

4) b) Soit h la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ par $h(x)=2^x(1-x)$. La fonction h est dérivable sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ et, en n'oubliant pas que l'on peut écrire $h(x)=\mathrm{e}^{x\ln(2)}(1-x)$ on a :

$$h'(x)=\ln(2)\mathrm{e}^{x\ln(2)}(1-x)-\mathrm{e}^{x\ln(2)}=\mathrm{e}^{x\ln(2)}((1-x)\ln(2)-1)=2^x((1-x)\ln(2)-1)$$

Comme x appartient à $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, on a $1-x\leq 1$ donc $(1-x)\ln(2)\leq\ln(2)<1$, ce qui fait que $h'(x)<0$ pour tout x de $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

La fonction h est donc strictement décroissante sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ et comme $h(0)=1$, on a $h(x)\leq 1$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\ 2^x(1-x)\leq 1}$$

4) c) D'après ce que l'on vient de voir, en l'appliquant avec $x=a$ qui est dans $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ donc, a fortiori, dans $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, et avec $E(X)=\dfrac{1}{1-a}$ et $\mu=2^a$, on a :

$$\frac{\mu}{E(X)}\leq 1$$

Comme $E(X)>0$, on a, en multipliant par $E(X)$:

$$\boxed{\mu\leq E(X)}$$

5) a) Comme $X(\Omega)=[1,+\infty[$ et comme $Y=\ln(X)$, on a $Y(\Omega)=\mathbb{R}_+$, ce qui garantit d'ores et déjà que :

$$\forall x<0,\ G(x)=0$$

Pour tout réel x positif, on a :

$$G(x) = P(Y \le x) = P(\ln(X) \le x)$$

Comme la fonction exponentielle est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, on peut poursuivre ainsi :

$$G(x) = P(Y \le x) = P(X \le \mathrm{e}^x)$$

On a donc :

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} F(\mathrm{e}^x) & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

5) b) Lorsque x est positif, e^x est supérieur ou égal à 1 donc :

$$F(\mathrm{e}^x) = 1 - \frac{1}{(\mathrm{e}^x)^{1/a}} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}$$

On en déduit :

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}x} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Comme $\frac{1}{a} > 0$, ceci montre que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{a}$.

Partie 2 : estimation d'un paramètre

6) a) On a $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$ donc T_n est fonction de l'échantillon $(Y_1,\ldots,Y_n)$, mais pas fonction de a donc T_n est un estimateur de a.

6) b) Les variables Y_k ont toutes une espérance égale à a, donc T_n a aussi une espérance et, par linéarité de l'espérance, on obtient : $E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a = \frac{1}{n} \times na = a$.

En conclusion, T_n est un estimateur sans biais de a.

6) c) Le risque quadratique de T_n est donné par : $r_a(T_n) = V(T_n) + b_a(T_n)^2$.

Comme T_n est sans biais, on a $b_a(T_n) = 0$ donc $r_a(T_n) = V(T_n)$.

Par propriété de la variance, on a : $V(T_n) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)$. Par mutuelle indépendance des variables $Y_1,\ldots,Y_n$, on en déduit : $V(T_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(Y_k)$. Les variables Y_k ont toutes la même variance égale à a^2 donc :

$$V(T_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} a^2 = \frac{1}{n^2} \times na^2 = \frac{a^2}{n}$$

Pour conclure, le risque quadratique de T_n est :

$$\boxed{r_a(T_n) = \frac{a^2}{n}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} r_a(T_n)=0$, on peut affirmer, c'est une condition suffisante, que T_n est un estimateur convergent de a.

7) a) D'après le cours, comme T_n a une espérance et une variance, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit :

$$\forall\varepsilon>0,\ P(|T_n-E(T_n)|\geq\varepsilon)\leq\frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$$

En remplaçant espérance et variance, on trouve :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ P(|T_n-a|\geq\varepsilon)\leq\frac{a^2}{n\varepsilon^2}}$$

7) b) En passant à l'événement contraire, on obtient :

$$1-P(|T_n-a|<\varepsilon)\leq\frac{a^2}{n\varepsilon^2}$$

Ceci peut s'écrire $P(|T_n-a|<\varepsilon)\geq 1-\dfrac{a^2}{n\varepsilon^2}$, ou encore :

$$P(-\varepsilon<T_n-a<\varepsilon)\geq 1-\frac{a^2}{n\varepsilon^2}$$

En multipliant par -1 les trois membres de l'encadrement qui est à l'intérieur de la probabilité, on a : $P(\varepsilon>a-T_n>-\varepsilon)\geq 1-\dfrac{a^2}{n\varepsilon^2}$, soit :

$$P(T_n+\varepsilon>a>T_n-\varepsilon)\geq 1-\frac{a^2}{n\varepsilon^2}$$

En termes d'intervalle, on a donc :

$$P(a\in\,]T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon[)\geq 1-\frac{a^2}{n\varepsilon^2}\qquad(1)$$

Enfin, on a l'inclusion $(a\in\,]T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon[)\subset(a\in[T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon])$, car l'événement de droite possède des issues favorables en plus que celui de gauche. Par croissance de la probabilité, on en déduit :

$$P(a\in[T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon])\geq P(a\in\,]T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon[)\qquad(2)$$

En faisant la synthèse de (1) et (2), on a finalement :

$$\forall\varepsilon>0,\ P(a\in[T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon])\geq 1-\frac{a^2}{n\varepsilon^2}\qquad(3)$$

Avec $0<a<\dfrac{1}{2}$, alors, en élevant au carré, on a $a^2<\dfrac{1}{4}$, puis en divisant par $n\varepsilon^2>0$, on obtient $\dfrac{a^2}{n\varepsilon^2}<\dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$, et enfin on trouve : $1-\dfrac{a^2}{n\varepsilon^2}>1-\dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

On peut donc prolonger l'inégalité (3), ce qui donne :

$$\forall\varepsilon>0,\ P(a\in[T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon])\geq 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Avec $n=1000$, on obtient :

$$\forall\varepsilon>0,\ P(a\in[T_{1000}-\varepsilon,T_{1000}+\varepsilon])\geq 1-\frac{1}{4000\varepsilon^2}$$

On dispose pour l'instant d'un intervalle de confiance pour a au niveau de confiance $1-\dfrac{1}{4000\varepsilon^2}$ et il faut choisir ε pour que ceci soit au moins égal à 90%, soit 0,9.

On doit donc résoudre $\dfrac{1}{4000\varepsilon^2}\leq 0{,}1$, ce qui donne : $\dfrac{1}{400}\leq \varepsilon^2$. On voit qu'il suffit de prendre $\varepsilon=\dfrac{1}{20}=0{,}05$ pour avoir exactement le niveau de confiance 90%.

L'intervalle de confiance cherché est donc :

$$\boxed{[T_{1000}-0{,}05\,;\,T_{1000}+0{,}05]}$$

Partie 3 : une convergence en loi

8) a) • La fonction h est positive sur $\mathbb{R}_-$ car elle y est nulle, elle est bien définie et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions positives (car la fonction exp est positive et $x^{1+\frac{1}{a}}>0$).

• La fonction h est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ car elle y est nulle, elle est aussi continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée puis produit de fonctions usuelles continues, ainsi h est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

• $\int_{-\infty}^{0} h(t)\,\mathrm{d}t=0$ car h est nulle sur $\mathbb{R}_-$.

L'intégrale $\int_{0}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ est deux fois impropre (en 0 et en $+\infty$), on va donc faire une étude séparée :

$\rightarrow$ Pour tout $x\geq 1$, on a : $\int_1^x h(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x \dfrac{1}{at^{1+\frac{1}{a}}}\exp\left(-\dfrac{1}{t^{1/a}}\right)\mathrm{d}t$. L'intégrande se présente sous la forme $u'\mathrm{e}^u$ donc on peut calculer sans peine, ce qui donne :

$$\int_1^x h(t)\,\mathrm{d}t=\left[\exp\left(-\frac{1}{t^{1/a}}\right)\right]_1^x=\exp\left(-\frac{1}{x^{1/a}}\right)-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-1/x^{1/a}}=\mathrm{e}^0=1$, $\int_1^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $1-\dfrac{1}{e}$.

$\rightarrow$ Pour tout $x\in\,]0,1[$, $\int_x^1 h(t)\,\mathrm{d}t=\left[\exp\left(-\dfrac{1}{t^{1/a}}\right)\right]_x^1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\exp\left(-\dfrac{1}{x^{1/a}}\right)$

Comme $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-1/x^{1/a}}=\lim\limits_{z\to-\infty}\mathrm{e}^z=0$, alors $\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1 et, au total, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t=1$.

Les trois points précédents permettent de conclure que h peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire Z.

8) b) Par définition, on a : $H(x)=\int_{-\infty}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t$.

• $\forall x\leq 0$, $H(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t=0$.

• $\forall x>0$,

$$H(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t+\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\exp\left(-\frac{1}{t^{1/a}}\right)\right]_\varepsilon^x=\exp\left(-\frac{1}{x^{1/a}}\right)-\lim_{\varepsilon\to0^+}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^{1/a}}\right).$$

Bilan :

$$\boxed{H(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x^{1/a}}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\le 0\end{cases}}$$

9) a) On a $(Z_n\le x)=\left(\dfrac{1}{n^a}\max(X_1,\dots,X_n)\le x\right)=(\max(X_1,\dots,X_n)\le n^a x)$

Posons $M_n=\max(X_1,\dots,X_n)$.

M_n prend la plus grande des valeurs prises par X_1, X_2, ..., X_n donc dire que M_n prend une valeur inférieure ou égale à $n^a x$, c'est dire que chacune des variables X_1, X_2, ..., X_n a pris une valeur inférieure ou égale à $n^a x$ (sinon, M_n ne serait pas inférieure ou égal à $n^a x$).

On a donc, pour tout réel x, $(Z_n\le x)=\bigcap_{k=1}^{n}(X_k\le n^a x)$, et ainsi :

$$H_n(x)=P(Z_n\le x)=P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k\le n^a x]\right)$$

Comme X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes, on obtient :

$$H_n(x)=\prod_{k=1}^{n}P(X_k\le n^a x)$$

Les variables X_k suivent toutes la même loi que X donc :

$$H_n(x)=\prod_{k=1}^{n}P(X\le n^a x)=P(X\le n^a x)^n=\left(F\left(n^a x\right)\right)^n$$

En remplaçant grâce à la question 3), on trouve :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ H_n(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{nx^{1/a}}\right)^n & \text{si } x\ge\dfrac{1}{n^a}\\ 0 & \text{si } x<\dfrac{1}{n^a}\end{cases}}$$

9) b) Pour tout réel x négatif ou nul, on a $x<\dfrac{1}{n^a}$ (puisque $n\in\mathbb{N}^*$) donc $H_n(x)=0$, et ainsi :

$$\boxed{\forall x\le 0,\ \lim_{n\to+\infty}H_n(x)=\lim_{n\to+\infty}0=0}$$

9) c) Comme n est entier, dès que $n>\left\lfloor\dfrac{1}{x^{1/a}}\right\rfloor$, on a $n\ge\left\lfloor\dfrac{1}{x^{1/a}}\right\rfloor+1$ donc, par définition de la partie entière, on a $n>\dfrac{1}{x^{1/a}}$. Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient : $x^{1/a}>\dfrac{1}{n}$.

Enfin, par stricte croissance de $t\mapsto t^a$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $x>\dfrac{1}{n^a}$.

Ainsi, d'après la question 9a), on obtient :

$$\boxed{\forall x>0,\ \forall n>\frac{1}{x^{1/a}},\ H_n(x)=\left(1-\frac{1}{nx^{1/a}}\right)^n}$$

9) d) On a $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$.

D'après la question 9c), pour tout x strictement positif, dès que $n > \frac{1}{x^{1/a}}$, on peut écrire $H_n(x) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{nx^{1/a}}\right)\right)$. Or on a $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{nx^{1/a}} = 0$ donc on peut appliquer l'équivalent ci-dessus à la quantité qui est à l'intérieur de l'exponentielle), ce qui donne :

$$n\ln\left(1-\frac{1}{nx^{1/a}}\right) \underset{+\infty}{\sim} n\times -\frac{1}{nx^{1/a}}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{nx^{1/a}}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\times -\frac{1}{nx^{1/a}} = -\frac{1}{x^{1/a}}$$

Par continuité de la fonction exponentielle en $-\frac{1}{x^{1/a}}$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} H_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^{1/a}}\right)}$$

9) e) D'après 9b) et 9d), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(x) = H(x)$, ce qui prouve que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Z.

CONCOURS PRÉ MASTER

RAPPORT DE CORRECTION 2023

Épreuve de MATHÉMATIQUES

Présentation de l'épreuve.
L'épreuve, longue comme d'habitude, comportait trois exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse et probabilités. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté et très sélectif tout en respectant scrupuleusement le programme.

- L'exercice 1, portant sur le programme d'analyse avait pour objectif d'établir l'égalité $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\binom{n+1}{k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}$ grâce à une étude fouillée de l'intégrale $I_n(x) = \int_0^1 (1-xt^2)^n \, \mathrm{d}t$.

- L'exercice 2, portant sur le programme d'algèbre linéaire, proposait l'étude de la matrice $A = C\,C^T$, où $C = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$, avec $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$, puis l'étude de l'application φ qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ associe $\varphi(M) = AM\,A$.

- L'exercice 3, portant sur le programme de probabilité, présentait une variable aléatoire X suivant une loi de Pareto de paramètre a, puis une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes dont la loi est celle de $Y = \ln(X)$ et permettant d'estimer a supposé inconnu. Pour finir, on étudiait la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $Z_n = \frac{1}{n^a}\max(X_1,\dots,X_n)$.

Statistiques.
Pour les 239 candidats ayant composé :

- La moyenne obtenue à cette épreuve est de 10,86 sur 20, très légèrement supérieure à celle de l'année dernière (plus 0,12 point).
- L'écart-type d'environ 5, 18 (un peu supérieur à celui de l'année dernière qui valait 4,94).
- La médiane est, quant à elle, égale à 10,6 (0,6 point au-dessus de celle de l'année dernière).
- 11,3 % des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4, le pourcentage était de 8,2 l'année dernière.
- 27,2% des candidats ont entre 8 et 12 (1,9 point de moins que l'année dernière)
- 13,4 % des candidats obtiennent une note supérieure ou égale à 18 (2,1 points de plus que l'année dernière).

Analyse des copies.

Il faut noter que le programme officiel de mathématiques du concours Prémaster de l'EDHEC a été cette année mieux respecté que par le passé.

Les correcteurs constatent que de trop nombreuses copies tiennent davantage du brouillon que de la copie de concours : la stratégie qui consiste à rebuter le lecteur par une présentation déplorable ne pousse pas à l'indulgence. Ce sont souvent les mêmes copies sur lesquelles on constate un manque de rigueur avec des résultats affirmés, soit sans preuve, soit avec une argumentation bâclée.

D'un point de vue académique, les correcteurs notent que le niveau est aussi hétérogène que l'année dernière : d'un côté, quelques très brillants candidats, ayant des connaissances bien en phase avec celles exigées par le programme, produisent des copies intéressantes, et de l'autre, un certain nombre de candidats très mal préparés (plus que l'année dernière) obtiennent des notes extrêmement basses. Cela dit, les correcteurs trouvent l'ensemble d'un niveau honorable grâce bien sûr aux très bons candidats, mais aussi à un bon nombre de candidats sérieux qui font bien ce qu'ils savent faire, notamment parce qu'ils ont investi, plus que par le passé, sur les probabilités (ceux qui ont traité l'exercice 3 s'en sont, pour un nombre conséquent, assez bien sortis).

Commentaires par exercice.

Exercice 1

- Il est étrange de voir des récurrences relativement faciles gâchées pour des problèmes de calcul.
- Il faut rédiger les intégrations par parties et ne pas se contenter d'écrire « après intégration par parties, on trouve etc » sans même vérifier qu'on a le droit de faire cette intégration par parties.

Exercice 2

- Parfois le calcul du carré d'une matrice de taille 3×3 est incorrect !
- Certains candidats inventent des théorèmes qui leur permettent, presque de façon immédiate, d'obtenir le résultat demandé !
- Dans la même veine, d'autres, ne sachant pas répondre à une question, laissent entendre que c'est du cours : c'est pratique mais pas très honnête !
- Rappelons qu'une application linéaire n'est pas forcément un endomorphisme.
- Quelques coups de bluff :

  « les trois colonnes de la matrice A vérifient $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ donc $\text{rg}(A) = 1$ ».

  « On a $Ae_k = j^{k-1}$ donc … » : le membre de droite de cette égalité est une matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et celui de gauche est un nombre complexe !

Exercice 3

- Il est curieux de voir une primitive correcte pour une fonction du type $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ à une question, puis une primitive fausse pour une fonction de la même famille un peu plus loin. Ceci dénote un réel problème de concentration chez certains candidats.
- Si on veut les variations d'une fonction h il n'est pas suffisant de résoudre l'équation $h'(x) = 0$.
- De trop nombreux candidats pensent que (ou ont besoin de) $1 - \frac{1}{\ln(2)} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$!
- La définition d'une variable à densité n'est connue que d'une petite poignée de candidats.
- Dans la série des affirmations sans preuve, voici un modèle lu très souvent :

$$« \frac{1}{a t^{\frac{1}{a}-1}} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) »$$

On ne peut pas accorder un quelconque crédit à ce genre d'affirmation, quand bien même elle est vraie !

En effet, c'est uniquement grâce à $0 < a < \dfrac{1}{2}$ que c'était correct !

- Ayant établi l'équivalent $n\ln\left(1 - \dfrac{1}{nx^{1/a}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x^{1/a}}$, il n'est pas question de composer par la fonction

exponentielle : c'est interdit pour la simple raison que souvent le résultat obtenu est faux quand on compose des équivalents.

- Écrire « $P\left(\dfrac{1}{n^a}\bigcap_{i=1}^{n} X_i \leq x\right)$ ou $P\left(\dfrac{1}{n^a}\bigcap_{i=1}^{n}(X_i) \leq x\right)$ » n'a aucun sens : il faut essayer de s'en convaincre.

Conclusion.
L'épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.
Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d'une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point du programme : les trois "compartiments" de ce programme (analyse, algèbre linéaire et probabilités) sont essentiels pour une bonne continuation des études à l'EDHEC.
Ajoutons, comme l'année dernière, que démontrer ne consiste pas à asséner une affirmation, même si c'est fait avec une énorme confiance, comme si tout allait toujours bien dans le monde mathématique ! Une preuve se doit, certes, d'être simple, mais elle doit être argumentée et honnête. Par exemple, en algèbre, les correcteurs ont souvent lu des explications souvent incomplètes ainsi qu'une rédaction imprécise où, comme le signale un correcteur, « les arguments sont donnés sans ordre et sans lien logique, comme si les candidats estimaient que c'était au correcteur de les compléter et de les relier entre eux… »