BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Code épreuve :

298

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Vendredi 6 mai 2011 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{e^t+1}\,dt$ si $x > 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

1) a) Montrer que : $\forall x \in\,]0, +\infty[$, $\forall t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{e^t+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

b) Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\dfrac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

c) En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.

2) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire : $f'(x) = -\dfrac{4}{x^3}g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.

b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g. En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3) a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\dfrac{t}{e^t+1} \leq 1$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où pour tout réel x, on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.
On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynomiale P appartenant à E, associe la fonction polynomiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P))(x) = 2xP(x) - (x^2-1)P'(x).$$

1) a) Montrer que f est une application linéaire.

b) En écrivant, pour tout réel x, $P(x) = a + bx + cx^2$, définir explicitement $(f(P))(x)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E.

c) Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2, puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

2) a) Vérifier que $\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\mathrm{Im} f$.

b) Déterminer $\mathrm{Ker} f$.

3) a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de A.

b) En déduire que f est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de f.

c) Vérifier que les sous-espaces propres de f, autres que $\mathrm{Ker} f$, sont inclus dans $\mathrm{Im} f$.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1) a) Pour tout i et pour tout k, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
Écrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\},\ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers naturels distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, alors les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

2) On pose $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $E(Y_n)$.

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

3) Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.

b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

4) Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec_2011 ;
Var   x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer ;
Begin
Randomize ;
Writeln('donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2') ;
Readln(n) ;
n1 : = 0 ; x1 : = 1 ;
For k : = 1 to n do
   begin
   hasard : = random(n) + 1 ;
   If  hasard = 1   then   begin x1 : = -------- ; n1 : = -------- ; end ;
   end ;
Writeln(x1, n1) ;
End.
```

Problème

Notations et objectifs

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et indépendantes.

On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition.

On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par : $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \dfrac{1}{2}$.

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$P(\,[X \leq x] \cap [Y = 1]\,) = P(X \leq x)P(Y = 1) \text{ et } P(\,[X \leq x] \cap [Y = -1]\,) = P(X \leq x)P(Y = -1).$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

1) Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

2) En utilisant le système complet d'événements $\{\, (Y = 1), (Y = -1)\,\}$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \frac{1}{2}\big(F_X(x) - F_X(-x) + 1\big).$$

Partie 2 : étude de deux premiers exemples

1) On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.
Reconnaître la loi de Z.

2) On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.

b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaître la loi de Z.

Partie 3 : étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

1) a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.

c) Établir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

2) a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$.

b) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.

3) a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

4) a) Déterminer $E(X)\,E(Y)$ et comparer avec $E(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

5) Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$.

a) On pose $Q = -\ln(1-V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.

b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable aléatoire R.

c) Informatique.

En tenant compte des résultats des questions 5a) et 5b), écrire en Turbo Pascal une déclaration de fonction dont l'en-tête est **function z : real ;** pour qu'elle simule la loi de Z.

Option ES

Corrigé EDHEC 2011

Exercice 1..

1) a) Pour tout x de $\mathbb{R}_+$ et pour tout t de $[0, x]$, on a, par croissance de la fonction exponentielle : $1 \leq e^t \leq e^x$. En ajoutant 1, on obtient :
$2 \leq e^t + 1 \leq e^x + 1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $[2, +\infty[$, on trouve :

$$\boxed{\frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^t+1} \leq \frac{1}{2}.}$$

b) En multipliant par t (avec $t \geq 0$), il vient : $\dfrac{t}{e^x+1} \leq \dfrac{t}{e^t+1} \leq \dfrac{t}{2}$.

On intègre ces fonctions continues entre 0 et x (avec $x \geq 0$) et on a :

$\dfrac{1}{e^x+1}\displaystyle\int_0^x t\,dt \leq \int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt \leq \frac{1}{2}\int_0^x t\,dt$. Ceci s'écrit : $\dfrac{1}{e^x+1} \times \dfrac{x^2}{2} \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt \leq \frac{x^2}{4}$.

En multipliant par $\dfrac{2}{x^2}$, qui est positif, on a finalement :

$$\boxed{\frac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.}$$

c) Comme $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2}$, on a, par encadrement : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

De plus, on sait que $f(0) = \dfrac{1}{2}$, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{f \text{ est continue à droite en } 0.}$$

2) a) La fonction h qui à x associe $\dfrac{x}{e^x+1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$) donc elle admet des primitives qui sont toutes de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Comme la fonction qui à tout x de $]0, +\infty[$ associe $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt$, est une primitive de h, on en déduit qu'elle est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Par ailleurs la fonction qui à tout x de $]0, +\infty[$ associe $\dfrac{2}{x^2}$ est une fonction rationnelle bien définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

En tant que produit de deux fonctions de classe C^1 sur $]\,0, +\infty\,[$, la fonction f est également de classe C^1 sur $]\,0, +\infty\,[$.

Pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x) = \dfrac{-4}{x^3}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt + \frac{2}{x^2}\times\frac{x}{e^x+1}$.

En factorisant par $\dfrac{-4}{x^3}$, on trouve : $f'(x) = \dfrac{-4}{x^3}\left(\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt - \frac{x^2}{2(e^x+1)}\right)$

En posant $g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt - \frac{x^2}{2(e^x+1)}$, on a bien :

$$\boxed{\forall x \in\,]\,0, +\infty\,[\;;\; f'(x) = -\frac{4}{x^3}\,g(x).}$$

b) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, en particulier, dérivable sur $]\,0, +\infty\,[$ comme différence de deux fonctions dérivables et on a :

$$g'(x) = \frac{x}{e^x+1} - \frac{1}{2}\times\frac{2x(e^x+1)-x^2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2x(e^x+1)}{2(e^x+1)^2} - \frac{2x(e^x+1)-x^2e^x}{2(e^x+1)^2}.$$

Après simplification, on trouve : $g'(x) = \dfrac{x^2e^x}{2(e^x+1)^2}$. On constate que $g'(x) > 0$ sur $]\,0, +\infty\,[$, donc g est croissante sur $]\,0, +\infty\,[$.

Comme $g(0) = 0$, on en déduit que g est strictement positive sur $]\,0, +\infty\,[$.

Pour finir, $\dfrac{-4}{x^3}$ est strictement positif sur $]\,0, +\infty\,[$, donc, par produit, $f'(x)$ est strictement négative sur $]\,0, +\infty\,[$.

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

3) a) Pour tout réel t positif, on a : $1 - \dfrac{t}{e^t+1} = \dfrac{e^t+1-t}{e^t+1}$. Il reste à étudier le signe de e^t+1-t.

En posant $k(t) = e^t+1-t$, la fonction k est bien sûr dérivable et on a : $k'(t) = e^t - 1$. Comme t est positif, on a $e^t \geq 1$, d'où : $\forall t \in [\,0, +\infty\,[$, $k'(t) \geq 0$. La fonction k est donc croissante sur $[0, +\infty\,[$ et, comme $k(0) = 2$, on est certain que : $\forall t \in [\,0, +\infty\,[$, $k(t) \geq 2 > 0$.

On en déduit que : $\forall t \in [\,0, +\infty\,[$, $\dfrac{e^t+1-t}{e^t+1} \geq 0$. Ceci prouve bien que :

$$\boxed{\forall t \in [\,0, +\infty\,[,\; \frac{t}{e^t+1} \leq 1.}$$

b) En intégrant ces fonctions continues entre 0 et x (avec $x \geq 0$), on obtient :

$\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt \leq x$. En multipliant par $\dfrac{2}{x^2}$, qui est positif, on a finalement : $f(x) \leq \dfrac{2}{x}$.

La partie gauche de l'encadrement obtenu à la question 1a) permet d'obtenir :

$\dfrac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$. Comme $\dfrac{1}{e^x+1}$ est positif, on peut élargir en écrivant : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$, on obtient, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Exercice 2...

1) a) Pour montrer que f est une application linéaire, on doit vérifier que, pour tout couple (P, Q) de fonctions polynomiales de E et pour tout réel λ, on a : $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.
Par définition de f, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(\lambda P+Q)\big)(x) = 2x\big(\lambda P+Q\big)(x) - (x^2-1)\big(\lambda P+Q\big)'(x)$.
Par définition de l'addition et du produit d'une fonction par un réel et par linéarité de la dérivation, on trouve :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(\lambda P+Q)\big)(x) &= 2x\big(\lambda P(x)+Q(x)\big) - (x^2-1)\big(\lambda P'(x)+Q'(x)\big).\\ &= \lambda\, 2x\, P(x) + 2xQ(x) - \lambda(x^2-1)\, P'(x) - (x^2-1)Q'(x).\\ &= \lambda\big(2xP(x)-(x^2-1)P'(x)\big) + \big(2xQ(x)-(x^2-1)Q'(x)\big).\\ &= \lambda\big(f(P)\big)(x) + \big(f(Q)\big)(x)\end{aligned}$$

Ceci prouve bien que : $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est linéaire.}}$$

b) Avec $P(x) = a + bx + cx^2$, on a : $P'(x) = b + 2cx$.
En remplaçant dans la définition, on obtient :
$\forall x\in\mathbb{R},\ \big(f(P)\big)(x) = 2x(a+bx+cx^2) - (x^2-1)(b+2cx)$.
Après développement et simplification, on obtient :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \big(f(P)\big)(x) = b + 2(a+c)x + bx^2.}$$

On constate que $f(P)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2, ce qui, par définition de l'espace vectoriel E, montre que :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

c) Pour déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$, il suffit de calculer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
On a :
• $e_0(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$ donc, en appliquant la relation trouvée à la question 1c) avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$, on trouve : $\forall x\in\mathbb{R},\ \big(f(e_0)\big)(x) = 2x$.
Bilan : $f(e_0) = 2\,e_1 = 0\,e_0 + 2\,e_1 + 0\,e_2$.
• $e_1(x) = x = 0 + 1x + 0x^2$ donc, en appliquant la relation trouvée à la question 1c) avec $a = 0$, $b = 1$ et $c = 0$, on trouve : $\forall x\in\mathbb{R},\ \big(f(e_1)\big)(x) = 1 + x^2$.
Bilan : $f(e_1) = e_0 + e_2 = 1\,e_0 + 0\,e_1 + 1\,e_2$.
• $e_2(x) = x^2 = 0 + 0x + 1x^2$ donc, en appliquant la relation trouvée à la question 1c) avec $a = 0$, $b = 0$ et $c = 1$, on trouve : $\forall x\in\mathbb{R},\ \big(f(e_2)\big)(x) = 2x$.
Bilan : $f(e_2) = 2\,e_1 = 0\,e_0 + 2\,e_1 + 0\,e_2$.

Les colonnes de la matrice A sont les coordonnées de $f(e_0), f(e_1)$ et $f(e_2)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a donc :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2) a) Par définition, on a : $\text{Im} f = \text{vect}(f(e_0), f(e_1), f(e_2)) = \text{vect}(2e_1, e_0 + e_2, 2e_1)$.
Comme deux des vecteurs de cette famille génératrice de $\text{Im} f$ sont égaux et proportionnels à e_1, il reste :

$$\boxed{\text{Im} f = \text{vect}(e_1, e_0 + e_2).}$$

Les vecteurs e_1 et $e_0 + e_2$ ne sont pas proportionnels (sinon, il existerait, par exemple, un réel a tel que $e_1 = a(e_0 + e_2)$, soit $e_1 - ae_0 - ae_2 = 0$, et la famille (e_0, e_1, e_2) serait liée, ce qui n'est pas le cas).
Par conséquent, la famille $(e_1, e_0 + e_2)$ est libre et comme elle engendre $\text{Im} f$, c'est une base de $\text{Im} f$.
On en déduit :

$$\boxed{\dim(\text{Im} f) = 2.}$$

b) Le théorème du rang s'écrit : $\dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f) = \dim E$.
Comme $\dim e = 3$ et $\dim(\text{Im} f) = 2n$, on en déduit que : $\dim(\text{Ker} f) = 1$.
Ainsi, pour déterminer une base de $\text{Ker} f$, il suffit de trouver un vecteur non nul appartenant à $\text{Ker} f$.
On remarque alors que, d'après la question 1c), on a : $f(e_0) = f(e_2)$.
Par linéarité de f, on en déduit que $f(e_0 - e_2) = 0$, ce qui prouve que : $e_0 - e_2 \in \text{Ker} f$.
Le vecteur $e_0 - e_2$ n'est pas nul donc :

$$\boxed{\text{La famille } (e_0 - e_2) \text{ est une base de } \text{Ker} f.}$$

3) a) Les valeurs propres de A sont les réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. La transformation $L_1 \leftrightarrow L_2$ donne :

$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. La transformation $L_2 \leftarrow 2L_2 + \lambda L_1$ donne :

$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. La transformation $L_2 \leftrightarrow L_3$ donne :

$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}$. Avec la transformation $L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda^2)L_1$, on obtient une réduite de Gauss de $A - \lambda I$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 4\lambda-\lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice triangulaire n'est pas inversible si et seulement si l'un au moins de ses pivots est nul, donc, si et seulement si : $4\lambda-\lambda^3=0$.

Les valeurs propres de A sont donc les réels λ solutions de $4\lambda-\lambda^3=0$, c'est-à-dire solutions de : $\lambda(4-\lambda^2)=0$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont : } -2,\ 0 \text{ et } 2.}$$

b) Comme l'espace E est de dimension 3 et que A (et f aussi) possède trois valeurs propres distinctes, on peut affirmer (c'est une condition suffisante) que :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

• On connaît déjà le sous-espace propre de f associé à la valeur 0, c'est $\mathrm{Ker} f$.
Cherchons les deux autres que l'on note $E_2(f)$ et $E_{-2}(f)$, associés respectivement aux valeurs propres 2 et -2.

• Pour déterminer $E_2(f)$, on résout $(A-2I)X=0$, en utilisant la réduite de Gauss obtenue à la question précédente, ce qui donne, en posant $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: $\begin{cases} 2a-2b+2c=0 \\ b-2c=0 \end{cases}$.

On obtient assez vite : $b=2c$ et $a=c$. On en déduit : $X=\begin{pmatrix} c \\ 2c \\ c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre $E_2(f)$ est donc engendré par la fonction dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont 1, 2 et 1, c'est-à-dire par le vecteur $e_0+2e_1+e_2$ (c'est la fonction qui à x associe $1+2x+x^2$).

$$\boxed{E_2(f)=\mathrm{vect}\,(e_0+2e_1+e_2).}$$

• Pour déterminer $E_{-2}(f)$, on résout $(A+2I)X=0$, en utilisant la réduite de Gauss obtenue à la question précédente, ce qui donne, en posant $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: $\begin{cases} 2a+2b+2c=0 \\ b+2c=0 \end{cases}$.

On obtient assez vite : $b=-2c$ et $a=c$. On en déduit : $X=\begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre $E_{-2}(f)$ est donc engendré par la fonction dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont 1, -2 et 1, c'est-à-dire par le vecteur $e_0-2e_1+e_2$ (c'est la fonction qui à x associe $1-2x+x^2$).

$$\boxed{E_{-2}(f)=\mathrm{vect}\,(e_0-2e_1+e_2).}$$

c) On peut écrire : $e_0 + 2e_1 + e_2 = (e_0 + e_2) + 2e_1$.
Ceci prouve que le vecteur de base de $E_2(f)$ est élément de Im f, en tant que combinaison linéaire des vecteurs de base de Im f, et par conséquent, que :

$$\boxed{E_2(f) \subset \operatorname{Im} f.}$$

De la même façon, on a : $e_0 - 2e_1 + e_2 = (e_0 + e_2) - 2e_1$.
Ceci prouve que le vecteur de base de $E_{-2}(f)$ est élément de Im f, pour les mêmes raisons que ci-dessus, et par conséquent, que :

$$\boxed{E_{-2}(f) \subset \operatorname{Im} f.}$$

Exercice 3..

1) a) Pour tout couple (i, k) d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$, notons $U_{i,k}$ l'événement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
L'événement $(X_i = 1)$ est réalisé si et seulement si les n tirages ont lieu dans les autres urnes que l'urne numéro i. On a donc : $(X_i = 1) = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}$.
Comme les choix des urnes ont lieu indépendamment les uns des autres, les événements $U_{i,k}$ sont mutuellement indépendants, donc les $\overline{U_{i,k}}$ le sont aussi. On en déduit : $P(X_i = 1) = \prod_{j=1}^{n} P(\overline{U_{i,k}})$.
De plus, pour chaque épreuve (consistant à choisir une urne), la probabilité de ne pas choisir l'urne numéro i est égale à $\dfrac{n-1}{n}$ (n choix possibles et $(n-1)$ choix ne donnant pas l'urne numéro i), on a donc : $P(\overline{U_{i,k}}) = 1 - \dfrac{1}{n}$. On trouve alors : $P(X_i = 1) = \prod_{j=1}^{n} (1 - \dfrac{1}{n})$.
En conclusion :

$$\boxed{\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.}$$

b) De la même manière, l'événement $([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$ est réalisé si et seulement si les n tirages ont lieu dans les autres urnes que les urnes dont les numéros sont i et j.
De plus, pour chaque épreuve (consistant à choisir une urne), la probabilité de ne choisir ni l'urne numéro i ni l'urne numéro j est égale à $\dfrac{n-2}{n}$ (n choix possibles et $(n-2)$ choix ne donnant ni l'urne numéro i, ni l'urne numéro j). Toujours par indépendance des choix d'urnes, on a :

$$\boxed{P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.}$$

c) On a : $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$. Comme $\frac{1}{n^2}$ est strictement positif, on en déduit :

$$\boxed{1-\frac{2}{n}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^2.}$$

Pour finir, la fonction $\left(x \mapsto x^n\right)$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ ($1-\frac{2}{n}$ est positif car n est supérieur ou égal à 2), on en déduit : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$.

Comme $P(X_i = 1) = P(X_j = 1) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ et comme $P(\,[X_i=1]\cap[X_j=1]\,) = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$, ce qui précède s'écrit : $P(\,[X_i=1]\cap[X_j=1]\,) < P(X_i = 1)\, P(X_j = 1)$.

On a donc $P(\,[X_i=1]\cap[X_j=1]\,) \neq P(X_i = 1)\, P(X_j = 1)$. Par définition, ceci montre que, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\boxed{X_i \text{ et } X_j \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

2) a) Par définition, on a : $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Par linéarité de l'espérance on a : $E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.

Comme X_i est une variable de Bernoulli de paramètre $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, on a : $E(X_i) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

On obtient alors : $E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

On conclut donc :

$$\boxed{E(Y_n) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.}$$

b) Après division par n, on a : $\frac{E(Y_n)}{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1-\frac{1}{n})\right)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, on sait que : $\ln(1-\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$.

On en déduit que : $n\ln(1-\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$.

On a donc : $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1-\frac{1}{n}) = -1$. Par continuité de la fonction exponentielle, on conclut :

$\lim_{n\to+\infty}\exp\left(n\ln(1-\frac{1}{n})\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$. On a bien :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{E(Y_n)}{n} = \frac{1}{e}.}$$

On en déduit que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{e\,E(Y_n)}{n} = 1$, ce qui traduit exactement le fait que :

$$\boxed{E(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}.}$$

3) a) Il y a autant de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves que de fois où l'urne numéro i a été choisie. Comme les choix d'urnes sont indépendants et qu'à chaque fois la probabilité de choisir l'urne numéro i est égale à $\frac{1}{n}$, on peut conclure que :

$$\boxed{N_i \text{ suit la loi } \mathcal{B}(n, \frac{1}{n}).}$$

D'après le cours, N_i possède une espérance et on a : $E(N_i) = n \times \frac{1}{n} = 1$.

$$\boxed{E(N_i) = 1.}$$

b) Le produit $N_i X_i$ est nul, puisque :
Soit X_i prend la valeur 0 et le produit est nul, soit $X_i = 1$, ce qui signifie que l'urne numéro i n'a pas été choisie et qu'il ne manque aucune boule dans cette urne, c'est-à-dire que $N_i = 0$ et le produit est encore nul.

$$\boxed{N_i X_i = 0.}$$

c) Comme $N_i X_i = 0$, on a $E(N_i X_i) = 0$. Par ailleurs, on a : $E(N_i) = 1$ et $E(X_i) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

On a donc : $\text{cov}(N_i, X_i) = E(N_i X_i) - E(N_i)\,E(X_i) = -\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

La covariance de N_i et X_i est différente de 0 donc :

$$\boxed{N_i \text{ et } X_i \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

4) Le programme complété est le suivant :

```
Program edhec_2011 ;
Var   x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer ;
Begin
Randomize ;
Writeln('donnez un entier naturel supérieur ou égal à 2') ;
Readln(n) ;
n1 : = 0 ; x1 : = 1 ;
For k : = 1 to n do
    begin
    hasard : = random(n) + 1 ;
    If  hasard = 1   then   begin x1 : = 0 ; n1 : = n1 + 1 ; end ;
    end ;
```

Writeln(x1, n1) ;
End.

Problème ....

Partie 1 : question préliminaire

1) La fonction de répartition d'une variable aléatoire V suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ est définie par :

$$\boxed{F_V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a \le x \le b \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}.}$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire E suivant la loi exponentielle de paramètre λ est définie par :

$$\boxed{F_E(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \ge 0 \end{cases}.}$$

2) Avec le système complet d'événements $\{(Y = 1), (Y = -1)\}$, la formule des probabilités totales s'écrit, pour tout réel x :
$P(Z \le x) = P(\, [Z \le x] \cap [Y = 1]\,) + P(\, [Z \le x] \cap [Y = -1]\,)$.
En remplaçant Z par XY, il vient : $P(Z \le x) = P(\, [XY \le x] \cap [Y = 1]\,) + P(\, [XY \le x] \cap [Y = -1]\,)$.
En d'autres termes, il reste : $P(Z \le x) = P(\, [X \le x] \cap [Y = 1]\,) + P(\, [-X \le x] \cap [Y = -1]\,)$.
Soit encore : $P(Z \le x) = P(\, [X \le x] \cap [Y = 1]\,) + P(\, [X \ge -x] \cap [Y = -1]\,)$.
Comme X et Y sont indépendantes, on obtient :
$\forall x \in \mathbb{R}, P(X \le x) = P(X \le x)P(Y = 1) + P(X \ge -x)P(Y = -1)$.
La variable X étant à densité, on a aussi :
$\forall x \in \mathbb{R}, P(X \le x) = P(X \le x)P(Y = 1) + P(X > -x)P(Y = -1)$.
En utilisant les fonctions de répartition, on trouve :
$\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = F_X(x)P(Y = 1) + (1 - F_X(-x))P(Y = -1)$.
On sait que $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \dfrac{1}{2}$, on obtient donc enfin :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \frac{1}{2}\big(F_X(x) - F_X(-x) + 1\big).}$$

Partie 2

1) Comme X suit la loi normale centrée réduite, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \dfrac{1}{2}\big(\Phi(x) - \Phi(-x) + 1\big)$.

On sait aussi que : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, il reste donc : $\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \dfrac{1}{2}\big(\Phi(x) - 1 + \Phi(x) + 1\big) = \Phi(x)$.

En conclusion :

$\boxed{Z \text{ suit la loi normale centrée réduite.}}$

2) a) Comme X suit la loi uniforme sur [0, 1], d'après le préliminaire, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases} \quad \text{d'où : } F_X(-x) = \begin{cases} 0 \text{ si } -x < 0 \\ -x \text{ si } 0 \le -x \le 1 \\ 1 \text{ si } -x > 1 \end{cases}.$$ On peut écrire ceci sous la forme :

$$F_X(-x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ -x \text{ si } -1 \le x \le 0 \\ 1 \text{ si } x < -1 \end{cases}.$$

b) • Si $x < -1$, alors $F_X(x) = 0$ et $F_X(-x) = 1$ et on a : $F_Z(x) = 0$.

• Si $-1 \le x < 0$, alors $F_X(x) = 0$ et $F_X(-x) = -x$ et on a : $F_Z(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

• Si $0 \le x \le 1$, alors $F_X(x) = x$ et $F_X(-x) = 0$ et on a : $F_Z(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

• Si $1 < x$, alors $F_X(x) = 1$ et $F_X(-x) = 0$ et on a : $F_Z(x) = 1$.

En résumé : $F_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{2} \text{ si } -1 \le x \le 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

On reconnaît alors que :

$$\boxed{Z \text{ suit la loi uniforme sur } [-1, 1]}.$$

Partie 3

1) a) On sait, d'après le rappel, que : $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ si } x \ge 0 \end{cases}$. On en déduit alors que :

$$F_X(-x) = \begin{cases} 0 \text{ si } -x < 0 \\ 1 - e^{x} \text{ si } -x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ 1 - e^{x} \text{ si } x \le 0 \end{cases}.$$

• Si $x < 0$, alors $F_X(x) = 0$ et $F_X(-x) = 1 - e^x$ et on a :

$F_Z(x) = \dfrac{1}{2}(0 - 1 + e^x + 1) = \dfrac{1}{2}e^x$.

• Si $x \ge 0$, alors $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ et $F_X(-x) = 0$ (même si $x = 0$) et on a :

$F_Z(x) = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-x} - 0 + 1) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{-x}$.

Pour résumer, on a bien :

$$\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}e^{-x} \text{ si } x \ge 0 \\ \dfrac{1}{2}e^{x} \text{ si } x < 0 \end{cases}}.$$

b) On sait déjà que Z est une variable aléatoire (admis par l'énoncé), il reste à vérifier deux conditions :

F_Z est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

• La continuité de F_Z sur $]-\infty, 0[$ est acquise puisque F_Z est proportionnelle à la fonction exponentielle sur cet intervalle.

• La continuité de F_Z sur $]0, +\infty[$ est acquise puisque F_Z est composée de deux fonctions affines ($x \mapsto -x$ et $x \mapsto 1 - \frac{1}{2}x$) et de la fonction exponentielle sur cet intervalle.

• En 0, on a : $\lim_{x\to 0^+} F_Z(x) = F_Z(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 0^-} F_Z(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}e^x = \frac{1}{2}$.

Premier bilan : la fonction F_Z est bien continue sur $\mathbb{R}$.

F_Z est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points (ici, en 0) ?

• La classe C^1 de F_Z sur $]-\infty, 0[$ est acquise puisque F_Z est proportionnelle à la fonction exponentielle sur cet intervalle.

• La classe C^1 de F_Z sur $]0, +\infty[$ est acquise puisque F_Z est composée de deux fonctions affines ($x \mapsto -x$ et $x \mapsto 1 - \frac{1}{2}x$) et de la fonction exponentielle sur cet intervalle.

Deuxième bilan : la fonction F_Z est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0.

En conclusion :

$$\boxed{Z \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

c) En dérivant, sauf en 0, les égalités définissant F_Z, on obtient : $F_Z'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

En notant f_Z une densité de Z et en posant $f_Z(0) = \frac{1}{2}$, on trouve finalement :

$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. On peut alors résumer ainsi :

$$\boxed{f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.}$$

2 a) L'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ est égale à l'espérance d'une variable aléatoire S suivant la loi exponentielle de paramètre 1 (espérance qui vaut $\frac{1}{1}$). On a donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1.}$$

b) Pour tout réel x, on a : $f_Z(-x) = \frac{1}{2}e^{-|-x|}$. Comme la fonction valeur absolue est paire, on obtient : $f_Z(-x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} = f_Z(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_Z \text{ paire.}}$$

D'après la question 2a), l'intégrale $\int_0^{+\infty} x\frac{1}{2}e^{-x}dx$ est convergente et vaut $\frac{1}{2}$. Comme sur $[0, +\infty[$, on a $f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ alors : $\int_0^{+\infty} x\,f_Z(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.
Par parité de f_Z, la fonction $h : x \mapsto x\,f_Z(x)$ est impaire. En effet, on a :
$h(-x) = -x\,f_Z(-x) = -x\,f_Z(x) = -h(x)$.
Par imparité de h, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} x\,f_Z(x)\,dx$ converge également et vaut $-\frac{1}{2}$.
La relation de Chasles permet de conclure que : $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_Z(x)\,dx$ converge et vaut 0.

$$\boxed{Z \text{ possède une espérance et } E(Z) = 0.}$$

3) a) L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$ est le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire S suivant la loi exponentielle de paramètre 1. L'espérance d'une telle variable aléatoire vaut 1 et sa variance aussi. Par conséquent, d'après la formule de Koenig-Huygens ($E(S^2) = V(S) + \left(E(S)\right)^2$), on trouve que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 2.}$$

b) D'après la question 3a), l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2\frac{1}{2}e^{-x}dx$ est convergente et vaut 1.
Comme sur $[0, +\infty[$, on a $f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ alors : $\int_0^{+\infty} x^2 f_Z(x)\,dx$ converge et vaut 1.
Par parité de f_Z, la fonction $k : x \mapsto x^2 f_Z(x)$ est paire. En effet, on a :
$k(-x) = (-x)^2 f_Z(-x) = x^2 f_Z(x) = k(x)$.
Par parité de k, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} x^2 f_Z(x)\,dx$ converge également et vaut 1.
La relation de Chasles permet de conclure que : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\,dx$ converge et vaut 2.

$$\boxed{Z \text{ possède un moment d'ordre 2 et } E(Z^2) = 2.}$$

On sait que : $V(Z) = E(Z^2) - \left(E(Z)\right)^2$ donc on a :

$$\boxed{V(Z) = 2.}$$

4) a) Comme $E(Y) = 0$, on a, par produit : $E(X)E(Y) = 0$. On sait également que $E(Z) = 0$, on a donc : $E(X)E(Y) = E(Z)$. Étant donné que $Z = XY$, ceci s'écrit : $E(X)E(Y) = E(XY)$.

On peut affirmer que : cov(X, Y) = 0. On retrouve ainsi le fait que, si deux variables aléatoires sont indépendantes, alors leur covariance est nulle (la réciproque étant fausse).

b) On a : $Z^2 = (XY)^2 = X^2Y^2$. Comme Y ne prend que les valeurs 1 et –1, Y^2 est la variable certaine égale à 1. On a donc : $Z^2 = X^2$.
On en déduit que $E(Z^2) = E(X^2) = V(X) + \left(E(X)\right)^2$ = 1 + 1 = 2.
De plus, $E(Z) = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{V(Z) = 2.}$$

5) a) En notant F_V et F_Q les fonctions de répartition de V et Q, on a :

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Q(x) = P(Q \leq x) = P(-\ln(1-V) \leq x) = P(\ln(1-V) \geq -x) = P(1-V \geq e^{-x})$, la dernière égalité provenant du fait que la fonction exponentielle est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ vers]0, +∞[.
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Q(x) = P(V \leq 1-e^{-x}) = F_V(1-e^{-x})$.

La fonction exponentielle est à valeurs dans]0, +∞[donc : $1-e^{-x} < 1$.
• Si $x \geq 0$, alors $e^{-x} < 1$ et $1-e^{-x} \geq 0$. On en déduit que : $0 \leq 1-e^{-x} < 1$. On peut alors remplacer et obtenir : $F_Q(x) = 1-e^{-x}$.

• Si $x < 0$, alors $e^{-x} > 1$ et $1-e^{-x} < 0$. On en déduit que : $F_Q(x) = 0$.
On a donc le résultat :

$$\boxed{Q \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } 1.}$$

b) La variable U suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ donc $U(\Omega) = \{0, 1\}$. On en déduit que $(2U-1)(\Omega) = \{-1, 1\}$. Comme $R = 2U-1$, on a :

$$\boxed{R(\Omega) = \{-1, 1\}.}$$

Pour aller plus loin, on a :
$P(R = -1) = P(2U-1 = -1) = P(U = 0) = \dfrac{1}{2}$.
$P(R = 1) = P(2U-1 = 1) = P(U = 1) = \dfrac{1}{2}$.
En conclusion, la loi de R est donnée par :

$$\boxed{P(R = -1) = P(R = 1) = \frac{1}{2}.}$$

La loi de R est la même que celle de Y.

c) • En Turbo Pascal, l'instruction « u : = random(2) ; » renvoie au hasard un nombre entier élément de {0, 1} donc : « u : = random(2) ; » simule la loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

• En Turbo Pascal, l'instruction « v : = random ; » renvoie au hasard un nombre réel, élément de [0, 1[donc : « v : = random ; » simule la loi uniforme sur [0, 1[.

La variable Z est le produit de X, qui suit la même loi que Q, simulée, d'après la question 5a), par « – ln(1 – random) », par Y qui suit la même loi que R, simulée, d'après la question 5b), par « 2∗random(2) – 1 »).

On peut donc écrire la déclaration suivante :

```
Function zed : real ;
   Begin
   zed : = – ln(1 – random)∗ (2∗random(2) – 1 ) ;
   End ;
```

RAPPORT DU JURY 2011
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option économique

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
Le sujet balayait largement le programme en donnant une place importante aux probabilités (troisième exercice et problème).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme. Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé ce sujet équilibré, sélectif, avec plus de questions abstraites que par le passé, et laissant encore plus d'initiative aux candidats que par le passé. Il a permis de bien apprécier les connaissances (deux questions de cours étaient posées) et les capacités à raisonner des candidats, ce qui est le premier but d'un texte de concours.

• **L'exercice 1** proposait l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}.$$

La présence d'une intégrale fonction de sa borne supérieure a joué un rôle très discriminant, les candidats semblant, pour un grand nombre d'entre eux, ne pas savoir dériver ce genre de fonctions.

• **L'exercice 2** étudiait l'application f qui à toute fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2, associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P))(x) = 2xP(x) - (x^2-1)P'(x).$$

Le fait que f soit un endomorphisme opérant dans un espace de fonctions n'a pas été trop déstabilisant, mais a permis de distinguer clairement les candidats qui maîtrisaient le programme de seconde année. Les notions de noyau et d'image (pourtant vues en première année) restent floues pour un nombre significatif de candidats. Il est à noter qu'une importante minorité des candidats n'assurent pas la recherche des valeurs propres d'une matrice carrée d'ordre 3.

• **L'exercice 3,** portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif d'étudier une suite de n épreuves aléatoires, chacune consistant à choisir au hasard une urne parmi n urnes numérotées de 1 à n, puis à en extraire une boule sans la remettre. On s'intéressait alors à plusieurs variables aléatoires associée à ces épreuves, dont la variable N_i égale au nombre de boules restant dans l'urne numérotée i à la fin de ces épreuves et la variable X_i valant 1 si l'urne numérotée i n'a jamais été choisie et 0 sinon.. Pour finir, une simulation informatique de X_1 et N_1 était proposée.
Ce type d'exercice permet de distinguer les candidats qui réfléchissent de ceux qui "bluffent" en paraphrasant l'énoncé : il ne fait aucun doute qu'il a permis aux meilleurs de faire la différence.

• **Le problème**, portant aussi sur le programme de probabilités, mais sur la partie "variables à densité", avait pour but de déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = XY$, où Y était une variable aléatoire de

loi donnée par : $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$. La partie 1 proposait le cas où X suit la loi normale centrée réduite et le cas où X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. La partie 2, plus longue, proposait le cas où X suit la loi exponentielle de paramètre 1. Une simulation informatique de la loi de Z était proposée à la fin de cette partie.
Le problème a été abordé avec des fortunes diverses, certains candidats n'ayant visiblement aucune connaissance sur cette partie du programme de seconde année. Dans l'ensemble, il a été plutôt bien réussi par ceux qui ont eu le temps (ou la présence d'esprit) de s'y intéresser.

Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3356 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10,36 sur 20 (quasiment égale à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 5,88 (plus important que l'année dernière, ce qui tendrait à prouver que l'écart se creuse entre les "forts en maths" et les autres).

• 38 % des candidats ont une note strictement inférieure à 8 (dont 15% ont une note inférieure à 4). Le nombre de copies très faibles (note inférieure à 4) est en augmentation de 6 % par rapport à l'année dernière.

• 22 % des candidats ont une note comprise entre 8 et 12.

• 19 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 16.

Conclusion :

Le niveau moyen reste stable par rapport à l'année dernière, mais il y a plus de copies très faibles (210 copies ont moins de 2 sur 20), mais aussi plus d'excellentes copies (400 copies ont plus de 18 sur 20).

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées malgré la présence d'un nombre non négligeable de candidats qui ne respectent pas la numérotation des questions, écrivent mal (ce sont souvent les mêmes) et rendent la tâche du correcteur pénible : qu'ils sachent qu'ils n'ont rien à gagner à pratiquer de la sorte, bien au contraire. Comme l'a signalé un correcteur : « la rigueur de pensée passe également par la rigueur d'écriture ».
Il reste toujours un noyau de candidats qui ne peuvent s'empêcher de faire du remplissage au lieu d'argumenter face aux questions dont le résultat est donné : aucun correcteur n'est dupe, rappelons-le.

Précisons pour les futurs candidats qu'ils ne sont pas obligés de recopier les énoncés des questions avant de les traiter et qu'ils ne sont pas, non plus, obligés de recopier tout un programme d'informatique si la question posée était seulement de compléter quelques instructions manquantes.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.