BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

mardi 3 mai 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1) a) Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.

b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.

2) Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et pour celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

```
u = 1
n = 0
while u > 0.00001
u = exp(-u)/u
n = n+1
end
disp(n)
```

```
u = 1
n = 0
while u < 100 000
u = exp(-u)/u
n = n+1
end
disp(n)
```

3) a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = e^{-x} - x^2$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$.

4) a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

5) On pose : $h(x)=\begin{cases}(f\circ f)(x) \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$.

a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.

b) Résoudre l'équation $h(x)=x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+$.

c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

Exercice 2

1) Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f\circ(f-Id)^2=0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

a) Déterminer $(f-Id)^2+f\circ(2Id-f)$.

b) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $x=(f-Id)^2(x)+\big(f\circ(2Id-f)\big)(x)$.

c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

2) Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $f\circ(f-Id)\circ(f-4Id)=0$.

a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant $\frac{1}{4}(X-1)(X-4)+X\,P(X)=1$.

b) En déduire que : $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

3) Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p\geq 2$), et tel que $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$.

a) Montrer qu'il existe p réels $a_1,\ldots,a_p$ avec $a_1\neq 0$, tels que $P=a_1X+\ldots+a_pX^p$.

b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux questions précédentes ?

Exercice 3

Les questions 1) et 2) sont indépendantes des suivantes.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 (avec $\sigma>0$). On rappelle qu'une densité de X est la fonction φ_{m,σ^2} définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi_{m,\sigma^2}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

On suppose que l'on ne connaît pas les paramètres $\theta_1=m$ et $\theta_2=\sigma^2$ et on souhaite les estimer par une méthode appelée méthode du maximum de vraisemblance.

Pour ce faire, on considère un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la loi de X, avec $n\geq 2$. On rappelle que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi que X.

On appelle vraisemblance du couple (θ_1,θ_2), la fonction notée L définie par :

$$L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\theta_1,\theta_2}(x_i)\text{, où } x_1, \ldots, x_n \text{ sont des réels donnés}$$

1) Donner l'expression de $L(\theta_1,\theta_2)$, puis celle de $\ln\big(L(\theta_1,\theta_2)\big)$ en fonction de θ_1, θ_2 et $x_1, \ldots, x_n$.

2) a) Justifier que la fonction f: $(\theta_1,\theta_2)\mapsto\ln\big(L(\theta_1,\theta_2)\big)$, définie sur l'ouvert $U=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, est de classe C^2 sur U.

b) Montrer que f admet un seul point critique $A=\big(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2}\big)$ sur U tel que :

$$\widehat{\theta_1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \text{ et } \widehat{\theta_2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\widehat{\theta_1}^2$$

c) Déterminer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A.

On vérifiera en particulier que : $\partial_{2,2}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \dfrac{-n}{2\widehat{\theta_2}^2}$.

d) En déduire que f admet un maximum local en $\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$.

e) Expliquer pourquoi la fonction L admet aussi un maximum local en $\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$.

On pose dorénavant $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X_n}^2$.

3) Vérifier que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de m.

4) Montrer que Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de σ^2.

5) On se propose, dans cette question, de montrer que Z_n est un estimateur convergent de σ^2.

a) Rappeler pourquoi la suite $\left(\overline{X_n}\right)$ converge en probabilité vers m. Qu'en déduire pour la suite $\left(\overline{X_n}^2\right)$? Justifier.

b) Montrer que X possède un moment d'ordre 4. En déduire que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ converge en probabilité vers $\sigma^2 + m^2$.

c) Établir que, pour tout ε strictement positif, on a :

$$\left(\left|Z_n - \sigma^2\right| \geq \varepsilon\right) \subset \left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sigma^2 + m^2)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(\left|\overline{X_n}^2 - m^2\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

d) Déduire des questions précédentes que Z_n est un estimateur convergent de σ^2.

Problème

Partie 1 : résultats préliminaires

1) Pour chaque entier naturel n, on considère une matrice A_n de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté $a_{i,j}(n)$, ainsi qu'une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $a_{i,j}$.

On suppose que la suite de matrices (A_n) converge vers la matrice A, c'est-à-dire que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!],\ \lim_{n\to+\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}$$

Soient B et C deux autres matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, indépendantes de n.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} BA_n = BA$. On admet que ceci reste vrai si B appartient à $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$.

On admet que $\lim_{n\to+\infty} A_nC = AC$ et que ceci reste vrai si C appartient à $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

On admet également que $\lim_{n\to+\infty} BA_nC = BAC$.

2) Montrer que, si une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est telle que, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, $\sum_{j=1}^{4} a_{i,j}$ est une constante c, alors c est valeur propre de A.

3) Montrer que si une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors la somme de ses valeurs propres, (chacune étant comptée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé) est égale à la trace de A.

Partie 2 : étude de la matrice d'une chaîne de Markov

On considère deux urnes U et V contenant chacune 3 boules. Au départ, l'urne U contient 3 boules blanches et l'urne V contient 3 boules noires.

On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autre urne (un tirage est un échange de 2 boules).

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient U avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage (c'est-à-dire après le $n^{\text{ème}}$ échange) et on a donc $X_0 = 3$.

On considère le vecteur ligne $L_n = \big(P(X_n = 0)\ \ P(X_n = 1)\ \ P(X_n = 2)\ \ P(X_n = 3)\big)$.

4) On suppose $n \geq 3$. Déterminer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![0,3]\!]$, $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$.

5) a) On suppose toujours $n \geq 3$. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont l'élément de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne et de la $(j+1)^{\text{ème}}$ colonne est égal à $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$. Justifier soigneusement que M est la matrice donnée à la question 12).

b) Montrer que : $\forall\, n \geq 3$, $L_{n+1} = L_n M$. On admet que ce résultat reste valable pour tout n de $\mathbb{N}$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = L_0 M^n$.

6) a) Montrer sans calcul que 1 est valeur propre de M.

b) On considère les vecteurs $E_1 = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Montrer que ${}^tE_1$ et ${}^tE_2$ sont vecteurs propres de M et donner les valeurs propres associées.

c) Montrer que, si M est diagonalisable, alors M possède une quatrième valeur propre λ que l'on déterminera. Vérifier que λ est effectivement valeur propre de M et conclure que M est diagonalisable.

Partie 3 : recherche d'une loi stationnaire

7) Justifier qu'il existe une matrice Q inversible, dont la première colonne ne contient que des "1", et une matrice D diagonale telles que $M = QDQ^{-1}$.

8) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$.

9) Soit $L = (\ell_1\ \ \ell_2\ \ \ell_3\ \ \ell_4)$ la première ligne de Q^{-1}.

a) En utilisant la relation $Q^{-1}M = DQ^{-1}$, montrer que : $\ell_1 = \ell_4$ et $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$.

b) Conclure, en considérant le produit $Q^{-1}Q$, que $\ell_4 = \dfrac{1}{20}$.

10) Déduire de ce qui précède les 16 coefficients de la matrice $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n$.

11) On considère une autre expérience aléatoire qui consiste à tirer 3 boules, une par une et sans remise, dans une urne qui en contient 6, dont 3 sont blanches et 3 sont noires.

On note B_k (resp. N_k) l'événement « obtenir une boule blanche (resp. noire) au $k^{\text{ème}}$ tirage » et X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Vérifier que $\begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tM$, associé à la valeur propre 1.

c) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers X.

12) On rappelle que la commande `X = grand(n, 'markov' , M, X0)` renvoie les n premiers états suivant l'état initial X_0, d'une chaîne de Markov de matrice M et on rappelle également que `Scilab` assimile un booléen vrai au nombre 1 et un booléen faux au nombre 0.

On considère le script suivant :

```
n = input('entrez la valeur de n :')
M = [0,1,0,0 ; 1/9,4/9,4/9,0 ; 0,4/9,4/9,1/9 ; 0,0,1,0]
X = grand(n,'markov',M,4)-1
f = sum(X==0)/n
disp(f)
```

De quelle valeur exacte le contenu de f est-il proche lorsque n est assez grand ?

Corrigé 2016

Exercice 1 ....

1) a) • La fonction *f* est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe C^1 en tant que quotient (bien défini) de fonctions de classe C^1.

Pour tout *x* de $\mathbb{R}_+^*$, on a : $f'(x) = \dfrac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = -\dfrac{e^{-x}(1+x)}{x^2}$.

Comme e^{-x} est strictement positif pour tout *x*, et comme *x* et $(1+x)$ sont aussi strictement positifs (car *x* est dans $\mathbb{R}_+^*$), on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) < 0$.

Ceci prouve que *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$ ↘	0

b) Par récurrence.

• Pour $n = 0$, le terme u_0 est bien défini (par l'énoncé) et il vaut 1 donc il est strictement positif.

• Si l'on suppose, pour un entier naturel *n* fixé, que u_n est bien défini et que $u_n > 0$, alors on peut appliquer la fonction *f* à u_n, ce qui définit correctement u_{n+1}, et comme de plus, *f* arrive dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $u_{n+1} = f(u_n) > 0$.

• Conclusion :

$$\boxed{\text{Chaque terme de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est parfaitement défini et strictement positif}}$$

2) En lisant le script de gauche, on constate que $u_5 \leq 0,00001$, mais en lisant celui de droite, on constate cette fois que $u_6 \geq 100\,000$.

On peut conjecturer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, et plus hardiment, que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty}$$

3) a) La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ comme différence de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et on a, pour tout x positif :

$$g'(x) = -e^{-x} - 2x = -\left(e^{-x} + 2x\right)$$

Comme $x \geq 0$ et $e^{-x} > 0$, il est évident que : $g'(x) < 0$. Par conséquent :

$$\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$$

b) Pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{x} = x \Leftrightarrow e^{-x} = x^2 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

On a $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. De plus, g est continue (elle est même de classe C^1) sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\left]-\infty, 1\right]$. Comme 0 appartient à $\left]-\infty, 1\right]$, l'équation $g(x) = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}_+$, et même dans $\mathbb{R}_+^*$ (car $g(0) \neq 0$).

Comme $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$, on déduit de tout ceci :

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ possède une seule solution dans } \mathbb{R}_+^*}$$

c) Comme on note α la solution de l'équation $f(x) = x$, on a $f(\alpha) = \alpha$.

On a $g(1) = \dfrac{1}{e} - 1 < 0$ et $g(\alpha) = 0$ donc $g(\alpha) > g(1)$, comme g décroît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\alpha < 1$.

Comme $\alpha < 1$, en appliquant la fonction f strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $f(\alpha) > f(1)$, ce qui s'écrit : $\alpha > \dfrac{1}{e}$.

Bilan :

$$\boxed{\frac{1}{e} < \alpha < 1}$$

4) a) On a $u_0 = 1$ donc :

$u_1 = f(u_0) = f(1) = \dfrac{1}{e}$ et $u_2 = f(u_1) = f\left(\dfrac{1}{e}\right) = e \times \exp\left(-\dfrac{1}{e}\right) = e^{1-\frac{1}{e}}$

Comme $1 - \dfrac{1}{e} > 0$, on obtient $u_2 > 1$, d'où : $u_2 > u_0$.

Ayant $u_2 > u_0$, en appliquant f décroissante, on a $f(u_2) < f(u_0)$, soit $u_3 < u_1$.

Conclusion :

$$\boxed{u_2 > u_0 \text{ et } u_3 < u_1}$$

b) On montre que $u_{2n+2} > u_{2n}$ par récurrence.

• Pour $n = 0$, on sait que $u_2 > u_0$ donc la proposition est vraie à l'ordre 0.

• Si l'on suppose, pour un entier naturel n fixé, que $u_{2n+2} > u_{2n}$, alors on peut appliquer la fonction f décroissante, ce qui donne $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$, c'est-à-dire : $u_{2n+3} < u_{2n+1}$. En appliquant f une fois de plus, on trouve : $u_{2n+4} > u_{2n+2}$.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} > u_{2n}$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

En appliquant f à l'inégalité $u_{2n+2} > u_{2n}$, on trouve (par décroissance de f) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+3} < u_{2n+1}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

5) a) Pour tout x strictement positif, on a :

$$h(x) = (f \circ f)(x) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{x}{e^{-x}} e^{-f(x)} = x\exp(x - f(x)) = x\exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right).$$

On a vu que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (x - f(x)) = -\infty$.

On a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp(x - f(x)) = 0$, ce qui donne : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0 = h(0)$.

Conclusion :

$$\boxed{h \text{ est continue en } 0}$$

b) On a déjà $h(0) = 0$ donc 0 est une solution de l'équation $h(x) = x$.

Pour x strictement positif, on a les équivalences suivantes :

$h(x) = x \Leftrightarrow x\exp(x - f(x)) = x \Leftrightarrow x(1 - \exp(x - f(x))) = 0$.

$h(x) = x \Leftrightarrow \exp(x - f(x)) = 1 \Leftrightarrow x - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x = \alpha$

La dernière égalité provient de la question 3b).

Finalement :

$$\boxed{h(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \alpha}$$

c) La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 (car tous les termes de la suite sont positifs) donc elle est convergente. En notant ℓ sa limite, comme on a $u_{2n+3} = (f \circ f)(u_{2n+1}) = h(u_{2n+1})$ et comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$, ℓ est un point fixe de h, donc : $h(\ell) = \ell$.

D'après la question 5b), on a deux options : $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.

Comme $u_1 = \dfrac{1}{e}$ et comme $u_{2n+1} < u_1$ (la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante), on en déduit : $u_{2n+1} < \dfrac{1}{e}$. En passant à la limite, on obtient : $\ell \leq \dfrac{1}{e}$.

Ceci rend l'option $\ell = \alpha$ impossible puisque l'on a vu que $\alpha > \dfrac{1}{e}$ donc il ne reste que l'option : $\ell = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0}$$

d) La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la question 2) laisse entendre que sa limite est $+\infty$. On raisonne par l'absurde en supposant que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ. Comme on a $u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n}) = h(u_{2n})$ et comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$, on sait, ici aussi, que : $h(\ell) = \ell$.
D'après la question 5b), on a $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.
Comme $u_{2n} \geq u_0$ (la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante), on a, par passage à la limite $\ell \geq u_0$, soit encore : $\ell \geq 1$.
Pour finir, on sait que $\alpha < 1$ donc les deux valeurs possibles de ℓ (qui sont 0 et α) ne sont pas acceptables, ce qui prouve que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, et comme elle est croissante, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty}$$

Exercice 2 ....

1) a) Comme *Id* et *f* commutent, on a, en développant :

$$(f - Id)^2 + f \circ (2Id - f) = f^2 - 2f + Id + 2f - f^2$$

Après simplification, il reste :

$$\boxed{(f - Id)^2 + f \circ (2Id - f) = Id}$$

b) En appliquant cette égalité à un vecteur *x* quelconque de $\mathbb{R}^n$, on obtient :

$$Id(x) = \left((f - Id)^2 + f \circ (2Id - f)\right)(x)$$

Par définition de l'addition des applications, on en déduit :

$$\boxed{x = (f - Id)^2(x) + \left(f \circ (2Id - f)\right)(x)}$$

c) • On a $f\left((f - Id)^2(x)\right) = \left(f \circ (f - Id)^2\right)(x)$, or on sait par hypothèse que $f \circ (f - Id)^2 = 0$ donc : $f\left((f - Id)^2(x)\right) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

On a donc déjà :

$$\boxed{(f-Id)^2(x)\in \operatorname{Ker}(f)}$$

• On a aussi $\big(f\circ(2Id-f)\big)(x)=f\big((2Id-f)(x)\big)$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\big(f\circ(2Id-f)\big)(x)\in \operatorname{Im}(f)}$$

Les deux résultats précédents montrent que : $\mathbb{R}^n=\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Im}(f)$.

Comme $\dim \operatorname{Ker}(f)+\dim \operatorname{Im}(f)=\dim \mathbb{R}^n$, on peut conclure :

$$\boxed{\mathbb{R}^n=\operatorname{Ker}(f)\oplus \operatorname{Im}(f)}$$

Remarque. On pouvait, à la place de la formule du rang, montrer que $\operatorname{Ker}(f)\cap \operatorname{Im}(f)=\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, mais c'était plus long.

2) a) En développant, on a :

$$\frac{1}{4}(X-1)(X-4)-1=\frac{1}{4}\big(X^2-5X+4)\big)-1=\frac{1}{4}X^2-\frac{5}{4}X=X\left(\frac{1}{4}X-\frac{5}{4}\right)$$

On peut donc écrire : $\frac{1}{4}(X-1)(X-4)+X\left(-\frac{1}{4}X+\frac{5}{4}\right)=1$

En posant $P(X)=-\frac{1}{4}X+\frac{5}{4}$, on a bien :

$$\boxed{\frac{1}{4}(X-1)(X-4)+X\,P(X)=1}$$

b) En remplaçant *X* par *f*, cette relation devient :

$$\frac{1}{4}(f-Id)\circ(f-4Id)+f\circ P(f)=Id$$

En appliquant à *x*, on obtient :

$$Id(x)=\left(\frac{1}{4}(f-Id)\circ(f-4Id)+f\circ P(f)\right)(x)$$

Toujours par définition de l'addition des applications, on a :

$$x=\frac{1}{4}\big((f-Id)\circ(f-4Id)\big)(x)+\big(f\circ P(f)\big)(x)$$

On va maintenant montrer que $\frac{1}{4}\big((f-Id)\circ(f-4Id)\big)(x)$ appartient à $\operatorname{Ker}(f)$ et que $\big(f\circ P(f)\big)(x)$ appartient à $\operatorname{Im}(f)$.

On a $f\left(\frac{1}{4}((f-Id)\circ(f-4Id))(x)\right)=\frac{1}{4}\big(f\circ(f-Id)\circ(f-4Id)\big)(x)=0_{\mathbb{R}^n}$, car $f\circ(f-Id)\circ(f-4Id)=0$.

On a donc bien montré que :

$$\frac{1}{4}\big((f-Id)\circ(f-4Id)\big)(x) \text{ appartient à } \mathrm{Ker}(f)$$

On a aussi $\big(f\circ P(f)\big)(x)=f\big(P(f)(x)\big)$, ce qui prouve bien que :

$$\big(f\circ P(f)\big)(x) \text{ appartient à } \mathrm{Im}(f)$$

Les deux résultats précédents montrent que : $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)$

Comme $\dim\mathrm{Ker}(f)+\dim\mathrm{Im}(f)=\dim\mathbb{R}^n$, on peut conclure :

$$\boxed{\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)}$$

3) a) Soit p le degré de P. On sait que P s'annule en 0 donc on peut écrire $P=XQ$, où Q est un polynôme de degré égal à $p-1$. De plus, on sait que P' ne s'annule pas en 0, et comme $P'=XQ'+Q$ alors $P'(0)=0+Q(0)=Q(0)$, ce qui prouve que $Q(0)\neq 0$.

On peut donc écrire $Q=a_1+a_2X+...+a_pX^{p-1}$, avec $a_1\neq 0$. En remplaçant dans l'égalité $P=XQ$, on trouve bien : $P=a_1X+...+a_pX^p$.

b) • Soit y un élément de $\mathrm{Im}(f)$, alors il existe un x de E tel que $y=f(x)$. D'autre part, comme y appartient à $\mathrm{Ker}(f)$, on a $f(y)=0$. De ces deux égalités, on en déduit que $f\big(f(x)\big)=0$, ce qui s'écrit : $f^2(x)=0$.

• Pour tout entier $k\geq 2$, on a : $f^k(x)=f^{k-2}\big(f^2(x)\big)=f^{k-2}(0)=0$ (cette dernière égalité provenant du fait que f^{k-2} est linéaire).

• Comme de plus, P est annulateur de f, on a : $a_1f+...+a_pf^p=0$.

En appliquant au vecteur x, on obtient : $a_1f(x)+...+a_pf^p(x)=0$, mais pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a $f^k(x)=0$ donc il reste $a_1f(x)=0$. Pour finir, comme $a_1\neq 0$, on en déduit : $f(x)=0$, et comme $y=f(x)$, on obtient : $y=0$.

On vient de montrer que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)\subset\{0\}$ et comme l'inclusion réciproque est acquise (le vecteur nul appartient à tous les espaces vectoriels), on a finalement : $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$.

La formule du rang assure que $\dim\mathrm{Ker}(f)+\dim\mathrm{Im}(f)=\dim E$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)}$$

c) Les polynômes annulateurs de f dans les deux questions précédentes étaient X^3-2X^2+X et X^3-5X^2+4X qui sont tous les deux des cas particuliers de polynômes vérifiant $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$.

Exercice 3 ....

1) On a $L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\theta_1,\theta_2}(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\theta_2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}}$.

Par propriété de la fonction exponentielle et du produit, on en déduit :

$$L(\theta_1,\theta_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{\theta_2}}\right)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\theta_2^{-n/2}\,e^{-\frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}.$$

$$L(\theta_1,\theta_2)=(2\pi)^{-n/2}\,\theta_2^{-n/2}\,e^{-\frac{1}{2\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\theta_1^2\right)}.$$

Finalement :

$$\boxed{L(\theta_1,\theta_2)=(2\pi)^{-n/2}\,\theta_2^{-n/2}\,e^{-\frac{1}{2\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1^2\right)}}$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}>0$, $\theta_2=\sigma>0$ et comme la fonction exponentielle est strictement positive, on peut prendre le logarithme népérien, ce qui donne :

$$\boxed{\ln\left(L(\theta_1,\theta_2)\right)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\theta_2-\frac{1}{2\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1^2\right)}$$

2) a) La fonction $f=\ln L$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ car $(\theta_1,\theta_2)\mapsto\ln\theta_2$ et $(\theta_1,\theta_2)\mapsto-\frac{1}{2\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1^2\right)$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ (la première comme composée d'une fonction coordonnée avec la fonction ln et la deuxième comme fraction rationnelle à dénominateur non nul).

b) On cherche le (ou les) point(s) critique(s) :

$$\partial_1(f)(\theta_1,\theta_2)=-\frac{1}{2\theta_2}\left(-2\sum_{i=1}^{n}x_i+2n\theta_1\right)=\frac{1}{\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\theta_1\right).$$

$$\partial_2(f)(\theta_1,\theta_2)=-\frac{n}{2\theta_2}+\frac{1}{2\theta_2^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1^2\right)$$

On résout maintenant $\nabla(f)(\theta_1,\theta_2)=0$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases}\frac{1}{\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\theta_1\right)=0\\ -\frac{n}{2\theta_2}+\frac{1}{2\theta_2^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1^2\right)=0\end{cases}$$

On trouve alors : $\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \theta_2 = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta_1^2\right) \end{cases}$

Comme la première égalité donne $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = n\theta_1$, on obtient, en remplaçant dans la deuxième : $\theta_2 = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\theta_1^2 + n\theta_1^2\right) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\theta_1^2\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \theta_1^2$.

La fonction f a donc un seul point critique $\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\boxed{\widehat{\theta_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } \widehat{\theta_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \widehat{\theta_1}^2}$$

c) Les dérivées partielles d'ordre 2 sont :

$$\partial_{1,1}^2(f)(\theta_1,\theta_2) = -\frac{n}{\theta_2}.$$

$$\partial_{1,2}^2(f)(\theta_1,\theta_2) \underset{Schwarz}{=} \partial_{2,1}^2(f)(\theta_1,\theta_2) = -\frac{1}{\theta_2^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta_1\right) = \frac{1}{\theta_2^2}\left(n\theta_1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

$$\partial_{2,2}^2(f)(\theta_1,\theta_2) = \frac{n}{2\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2^3}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\theta_1\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta_1^2\right)$$

En le point critique, on obtient :

$$\partial_{1,1}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = -\frac{n}{\widehat{\theta_2}}.$$

$$\partial_{1,2}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \partial_{2,1}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \frac{1}{\widehat{\theta_2}^2}\left(n\,\widehat{\theta_1} - \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

$$\partial_{2,2}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \frac{n}{2\,\widehat{\theta_2}^2} - \frac{1}{\widehat{\theta_2}^3}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\,\widehat{\theta_1}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\,\widehat{\theta_1}^2\right)$$

Il faut alors se souvenir que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = n\,\widehat{\theta_1}$, ce qui permet de simplifier :

$$\partial_{1,1}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = -\frac{n}{\widehat{\theta_2}}.$$

$$\partial_{1,2}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \partial_{2,1}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = 0.$$

$$\partial_{2,2}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \frac{n}{2\,\widehat{\theta_2}^2} - \frac{1}{\widehat{\theta_2}^3}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\widehat{\theta_1}^2\right).$$

Il reste à utiliser l'égalité $\widehat{\theta_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \widehat{\theta_1}^2$, soit $n\widehat{\theta_2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\widehat{\theta_1}^2$ pour simplifier la dernière dérivée partielle d'ordre 2 et on obtient :

$\partial_{2,2}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \frac{n}{2\widehat{\theta_2}^2} - \frac{1}{\widehat{\theta_2}^3} \times n\widehat{\theta_2} = \frac{n}{2\widehat{\theta_2}^2} - \frac{n}{\widehat{\theta_2}^2} = \frac{-n}{2\widehat{\theta_2}^2}$.

d) Finalement, la hessienne de *f* en $\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$ est la matrice :

$$\nabla^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\widehat{\theta_2}} & 0 \\ 0 & \frac{-n}{2\widehat{\theta_2}^2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est diagonale donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, $\frac{-n}{\widehat{\theta_2}}$ et $\frac{-n}{2\widehat{\theta_2}^2}$, qui sont tous deux strictement négatifs. La matrice $\nabla^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$ est donc définie négative et on peut conclure :

$$\boxed{f \text{ possède un maximum local en } \left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)}$$

e) D'après le résultat précédent, il existe un voisinage *V* de $\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$, tel que pour tout (θ_1, θ_2) élément de *V*, on a : $f(\theta_1, \theta_2) \leq f\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$. En appliquant la fonction exponentielle qui est croissante, on obtient :

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in V,\ L(\theta_1, \theta_2) \leq L\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{L \text{ admet aussi un maximum local en } \left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)}$$

3) Par linéarité de l'espérance, on a : $E\left(\overline{X_n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = \frac{1}{n} \times nm = m$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\overline{X_n} \text{ est un estimateur sans biais de } m}$$

4) Par linéarité de l'espérance, on a : $E(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right) - E\left(\overline{X_n}^2\right)$.

Il reste à déterminer les moments d'ordre 2 de X_i et de $\overline{X_n}$, et comme on connaît leurs variances, on utilise le théorème de Koenig-Huygens ("à l'envers") :

$E\left(X_i^2\right) = V(X_i) + \left(E(X_i)\right)^2 = \sigma^2 + m^2$.

$E\left(\overline{X_n}^2\right) = V\left(\overline{X_n}\right) + \left(E\left(\overline{X_n}\right)\right)^2 = \dfrac{\sigma^2}{n} + m^2$.

On remplace dans $E(Z_n)$, ce qui donne :

$E(Z_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + m^2) - \left(\dfrac{\sigma^2}{n} + m^2\right) = \dfrac{1}{n} \times n(\sigma^2 + m^2) - \left(\dfrac{\sigma^2}{n} + m^2\right)$.

$E(Z_n) = \sigma^2 + m^2 - \left(\dfrac{\sigma^2}{n} + m^2\right) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Z_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$, on peut affirmer que :

$$\boxed{Z_n \text{ est un estimateur asymptotiquement sans biais de } \sigma^2}$$

5) a) La loi faible des grands nombres appliquée à la suite de variables (X_i) qui sont indépendantes, qui ont une espérance m et une variance σ^2, garantit que :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\overline{X_n}\right) \text{ converge en probabilité vers } m}$$

Comme la fonction "carré" est continue sur $\mathbb{R}$, on est certain que :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\overline{X_n}^2\right) \text{ converge en probabilité vers } m^2}$$

b) Il faut montrer la convergence absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)dx$ qui n'a pas d'autre impropreté qu'en $-\infty$ et $+\infty$ puisque la fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}$.

On utilise un test de Riemann :

$$x^2 \times x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x^6\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(x-m)^6\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Or on peut écrire :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(x-m)^6\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^6}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)^6 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^6}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]^3 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

En posant $u = \dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$, on obtient : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 \times x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x) = \dfrac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^6}{\sigma\sqrt{2\pi}} \lim\limits_{u\to+\infty} u^3\, e^{-u} = 0$ (par croissances comparées).

Par conséquent, on a : $x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}dx$ est absolument convergente en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$, alors grâce au critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)dx$ est absolument convergente

De même, l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$ est aussi absolument convergente, et toujours grâce au critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)dx$ est absolument convergente.

Comme la fonction $x \mapsto x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)$ est continue sur $[-1,1]$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)dx$ existe et ainsi : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)dx$ est absolument convergente.

Conclusion :

$$\boxed{X \text{ possède un moment d'ordre } 4}$$

Les variables $X_1^2,...,X_n^2$ possèdent une espérance σ^2+m^2, de plus, comme X possède un moment d'ordre 4, les variables $X_1^2,...,X_n^2$ possèdent un moment d'ordre 2, donc une variance.

Pour finir, les variables $X_1^2,...,X_n^2$ sont mutuellement indépendantes car $X_1,...,X_n$ le sont (lemme des coalitions), et on peut appliquer la loi faible des grands nombres qui affirme que :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \text{ converge en probabilité vers } \sigma^2+m^2}$$

c) On va montrer que :

$$\left(\left|Z_n-\sigma^2\right|\geq\varepsilon\right)\subset\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\sigma^2+m^2)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup\left(\left|\overline{X_n}^2-m^2\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Soit $A=\left(\left|Z_n-\sigma^2\right|\geq\varepsilon\right)$ et $B=\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\sigma^2+m^2)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup\left(\left|\overline{X_n}^2-m^2\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)$,

Au lieu de montrer que $A\subset B$, on va montrer (c'est plus pratique) que $\overline{B}\subset\overline{A}$

On a $\overline{B}=\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\sigma^2+m^2)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap\left(\left|\overline{X_n}^2-m^2\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$ et si $\overline{B}$ est réalisé, alors on a $\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\sigma^2+m^2)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$ **et** $\left(\left|\overline{X_n}^2-m^2\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$ qui sont réalisés.

De plus, on a :

$$\left|Z_n-\sigma^2\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X_n}^2-\sigma^2\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sigma^2+m^2\right)-\left(\overline{X_n}^2-m^2\right)\right|$$

On en déduit grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\left|Z_n-\sigma^2\right|\leq\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sigma^2+m^2\right)\right|+\left|\overline{X_n}^2-m^2\right|$$

Par conséquent, si $\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - (\sigma^2 + m^2) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$ **et** $\left(\left| \overline{X_n}^{\,2} - m^2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$ sont réalisés, alors $\left(\left| Z_n - \sigma^2 \right| < \varepsilon \right)$ l'est aussi.

Ceci prouve que $\overline{B} \subset \overline{A}$ et on en déduit que $A \subset B$, c'est-à-dire que, pour tout ε strictement positif, on a :

$$\boxed{\left(\left| Z_n - \sigma^2 \right| \geq \varepsilon \right) \subset \left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - (\sigma^2 + m^2) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \cup \left(\left| \overline{X_n}^{\,2} - m^2 \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right)}$$

d) Par croissance de la probabilité et grâce à la formule $P(E \cup F) \leq P(E) + P(F)$, qui est une conséquence de la formule du crible, on obtient :

$$P\left(\left| Z_n - \sigma^2 \right| \geq \varepsilon \right) \leq P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - (\sigma^2 + m^2) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) + P\left(\left| \overline{X_n}^{\,2} - m^2 \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

La première probabilité du membre de droite tend vers 0 d'après la question 5b) et la deuxième probabilité du membre de droite tend vers 0 d'après la question 5a), donc, par encadrement (une probabilité est positive) :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left| Z_n - \sigma^2 \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{Z_n \text{ est un estimateur convergent de } \sigma^2}$$

Problème ....

Partie 1 : résultats préliminaires

1) En notant $b_{i,j}$ l'élément de la matrice B situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne, l'élément de la matrice BA_n situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est : $\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\, a_{k,j}(n)$. Comme $\lim_{n \to +\infty} a_{k,j}(n) = a_{k,j}$, alors par produit et somme de limites finies, on a : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\, a_{k,j}(n) = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\, a_{k,j}$, ce qui est l'élément de la matrice BA situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} BA_n = BA}$$

2) Si on fait le produit de A par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, on obtient :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{4}a_{1,j}\\\sum_{j=1}^{4}a_{2,j}\\\sum_{j=1}^{4}a_{3,j}\\\sum_{j=1}^{4}a_{4,j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\c\\c\\c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Ceci montre que :

$$\boxed{c \text{ est valeur propre de } A}$$

3) Une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement si, elle est semblable à une matrice D diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.
Comme deux matrices semblables ont même trace, on peut conclure que la somme des valeurs propres de A (c'est la trace de D) est égale à la trace de A.

Partie 2 : étude de la matrice d'une chaîne de Markov

4) Comme $n \geq 3$, on est sûr que les événements qui conditionnent ne sont pas de probabilité nulle car en effet, on a : $X_1(\Omega)=\{2\}$, $X_2(\Omega)=\{1,2,3\}$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $X_n(\Omega)=\{0,1,2,3\}$.

• Cherchons $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=j)$: si l'urne contient zéro boule blanche (c'est-à-dire 3 boules noires) avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, alors après le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, il y aura une boule blanche à coup sûr dans l'urne U : en effet, lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, il y a échange certain d'une boule noire de U avec une boule blanche de V.
Conclusion :

$$\boxed{P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=1 \text{ et } P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)=P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)=P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=3)=0}$$

• Cherchons $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=j)$: si l'urne contient une boule blanche (c'est-à-dire 2 boules noires) avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, alors il y a quatre possibilités lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage :

❶ Soit on pioche la boule blanche de U et une boule blanche de V et dans ce cas il y a toujours une boule blanche dans U, événement de probabilité $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$.

❷ Soit on pioche une boule noire de U et la boule noire de V et dans ce cas il y a toujours une boule blanche dans U, événement de probabilité $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.

❸ Soit on pioche la boule blanche de U et la boule noire de V et dans ce cas il y a zéro boule blanche dans U, événement de probabilité $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

❹ Soit on pioche une boule noire de U et une boule blanche de V et dans ce cas il y a deux boules blanches dans U, événement de probabilité $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

Avec ❶ et ❷, par incompatibilité : $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

Avec ❸ : $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{9}$

Avec ❹ : $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=\frac{4}{9}$

Comme on échange une seule boule, on a bien sûr : $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=3)=0$.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{gathered} P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{9},\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=3)=0 \\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=\frac{4}{9} \end{gathered}}$$

• Cherchons $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=j)$: si l'urne contient deux boules blanches (c'est-à-dire une boule noire) avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, alors il y a quatre possibilités lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage :

❶ Soit on pioche la boule noire de U et une boule noire de V et dans ce cas il y a toujours deux boules blanches dans U, événement de probabilité $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.

❷ Soit on pioche une boule blanche de U et la boule blanche de V et dans ce cas il y a toujours deux boules blanches dans U, événement de probabilité $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.

❸ Soit on pioche la boule noire de U et la boule blanche de V et dans ce cas il y a trois boules blanches dans U, événement de probabilité $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

❹ Soit on pioche une boule blanche de U et une boule noire de V et dans ce cas il y a une boule blanche dans U, événement de probabilité $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

Avec ❶ et ❷, par incompatibilité : $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

Avec ❸ : $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3)=\frac{1}{9}$

Avec ❹ : $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=\dfrac{4}{9}$

Comme on échange une seule boule, on a bien sûr : $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)=0$.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{c} P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)=0\,,\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3)=\dfrac{1}{9} \\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=\dfrac{4}{9} \end{array}}$$

• Cherchons $P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=j)$: si l'urne contient trois boules blanches (c'est-à-dire zéro boule noire) avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, alors il est certain, lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, que l'on échangera l'une des boules blanches de *U* avec une des boules noires de *V*, donc :

$$\boxed{P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2)=1 \text{ et } P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=0)=P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1)=P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=3)=0}$$

5) a) Il suffit d'écrire sous forme matricielle les résultats de la question précédente et on obtient, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 3 :

$$\boxed{M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

On vérifie qu'effectivement *M* est la matrice donnée à la question 12).

b) Les événements $(X_n=0), (X_n=1), (X_n=2), (X_n=3)$ sont de probabilités non nulles dès que $n\geq 3$, et la formule des probabilités totales, associée au système complet d'événements $\left(X_n=j\right)_{0\leq j\leq 3}$, s'écrit :

$$\forall i\in[\![0,3]\!],\ P\left(X_{n+1}=i\right)=\sum_{j=0}^{4}P\left(X_n=j\right)P_{(X_n=j)}\left(X_{n+1}=i\right)$$

D'après la question précédente, on connaît toutes les probabilités conditionnelles, il suffit donc de les remplacer (en faisant attention) pour les 4 valeurs possibles de *i* et on trouve :

$$P\left(X_{n+1}=0\right)=\frac{1}{9}P\left(X_n=1\right).$$

$$P\left(X_{n+1}=1\right)=P\left(X_n=0\right)+\frac{4}{9}P\left(X_n=1\right)+\frac{4}{9}P\left(X_n=2\right)$$

$$P\left(X_{n+1}=2\right)=\frac{4}{9}P\left(X_n=1\right)+\frac{4}{9}P\left(X_n=2\right)+P\left(X_n=3\right)$$

$$P\left(X_{n+1}=3\right)=\frac{1}{9}P\left(X_n=2\right)$$

Pour conclure, tout ceci s'écrit matriciellement :

$$P\left(X_{n+1}=0\right)=\left(P(X_n=0)\ \ P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\right)\begin{pmatrix}0\\1/9\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$P\left(X_{n+1}=1\right)=\left(P(X_n=0)\ \ P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\right)\begin{pmatrix}1\\4/9\\4/9\\0\end{pmatrix}.$$

$$P\left(X_{n+1}=2\right)=\left(P(X_n=0)\ \ P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\right)\begin{pmatrix}0\\4/9\\4/9\\1\end{pmatrix}.$$

$$P\left(X_{n+1}=3\right)=\left(P(X_n=0)\ \ P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1/9\\0\end{pmatrix}.$$

Avec les notations de l'énoncé, on obtient :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\,,\ L_{n+1}=L_n\,M}$$

Remarque. L'énoncé ne le demande pas, mais on peut montrer que les 4 égalités obtenues plus haut restent valables pour $n=0$ puisqu'elles donnent :
$P\left(X_1=0\right)=0$, $P\left(X_1=1\right)=0$, $P\left(X_1=2\right)=1$ et $P\left(X_1=3\right)=0$, en accord avec $X_1(\Omega)=\{2\}$.
Elles sont aussi valables pour $n=1$ puisqu'elles donnent :
$P\left(X_2=0\right)=0$, $P\left(X_2=1\right)=\dfrac{4}{9}$ (échange d'une boule blanche de *U* et d'une boule noire de *V*), $P\left(X_2=2\right)=\dfrac{4}{9}$ (échange de 2 boules blanches ou de 2 boules noires), et $P\left(X_2=3\right)=\dfrac{1}{9}$ (échange d'une boule noire de *U* et d'une boule blanche de *V*).
Elles sont aussi valables pour $n=2$ puisqu'elles donnent :
$P\left(X_3=0\right)=0$, $P\left(X_3=1\right)=\dfrac{4}{9}$, $P\left(X_3=2\right)=\dfrac{4}{9}$ et $P\left(X_3=3\right)=\dfrac{1}{9}$, ce qu'il est facile de vérifier en écrivant la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements de probabilité non nulle $\left(X_2=j\right)_{1\le j\le 3}$.

c) On procède par récurrence.
• Pour $n=0$, on a $L_0\,M^0=L_0\,I=L_0$.

• Si l'on suppose, pour un n fixé dans $\mathbb{N}$, que $L_n = L_0 M^n$, alors comme $L_{n+1} = L_n M$, on a en remplaçant : $L_{n+1} = L_0 M^n M = L_0 M^{n+1}$.

• Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = L_0 M^n}$$

6) a) Les sommes des éléments de chaque ligne sont toutes égales à 1 donc, d'après la question 2), on sait que :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } M}$$

b) Il suffit de faire les calculs :

$$M\,{}^t E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/9 \\ 1/9 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\,{}^t E_1 .$$

$$M\,{}^t E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/9 \\ -3/9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\,{}^t E_2$$

${}^t E_1$ et ${}^t E_2$ sont vecteurs propres de M associés respectivement aux valeurs propres $-\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{3}$.

c) Si l'on suppose M est diagonalisable, alors, d'après la question 3), la somme de ses valeurs propres est égale à sa trace. Or la trace de M est égale à $\frac{8}{9}$, et pour l'instant, la somme des trois valeurs propres de M vaut $1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{11}{9}$.

Ceci prouve que M possède une quatrième valeur propre, en l'occurrence : $-\frac{1}{3}$.

Ce raisonnement montre que, si M possède une quatrième valeur propre, alors cette valeur propre est $-\frac{1}{3}$, mais rien n'est encore fait !

Vérifions donc que $-\frac{1}{3}$ est effectivement valeur propre de M :

$$M + \frac{1}{3}I = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 7/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 7/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Avec la transformation $L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 4/9 & 7/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Avec la transformation $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Les deux dernières lignes étant égales, cette matrice n'est pas inversible donc $M + \frac{1}{3}I$ n'est pas inversible, ce qui prouve que $-\frac{1}{3}$ est valeur propre de *M*.

Pour conclure, *M* est une matrice d'ordre 4 et elle possède 4 valeurs propres distinctes donc :

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$$

Partie 3 : recherche d'une loi stationnaire

7) Comme *M* est diagonalisable, on sait qu'il existe une matrice *Q* inversible et une matrice *D* diagonale telles que :

$$\boxed{M = QDQ^{-1}}$$

Comme 1 est valeur propre de *M* associée au sous-espace propre engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on peut choisir la première colonne de *M* égale à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et la première colonne de *D* égale à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8) Par récurrence, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = QD^nQ^{-1}$.

• Pour $n = 0$, $QD^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I = M^0$.

• Si l'on suppose pour un *n* fixé dans $\mathbb{N}$ que $M^n = QD^nQ^{-1}$, alors on a :

$$M^{n+1} = MM^n = (QDQ^{-1})(QD^nQ^{-1}) = QD(Q^{-1}Q)D^nQ^{-1} = QDID^nQ^{-1} = QDD^nQ^{-1}$$

On trouve bien : $M^{n+1} = QD^{n+1}Q^{-1}$.

• Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = QD^nQ^{-1}}$$

La première colonne de D est imposée et on choisit un ordre arbitraire pour les autres, on peut donc prendre $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/9)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1/3)^n \end{pmatrix}$$

Comme $\left|-\frac{1}{9}\right| < 1$, $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ et $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Grâce au résultat admis de la question 1), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = Q\left(\lim\limits_{n\to+\infty} D^n\right)Q^{-1}$ et on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} M^n = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}}$$

9) a) • La première ligne de la matrice $Q^{-1}M$ est :

$$(\ell_1\ \ell_2\ \ell_3\ \ell_4)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\ell_2}{9} \ \vdots\ \ell_1 + \frac{4\ell_2}{9} + \frac{4\ell_3}{9} \ \vdots\ \frac{4\ell_2}{9} + \frac{4\ell_3}{9} + \ell_4 \ \vdots\ \frac{\ell_3}{9}\right)$$

• La première ligne de la matrice DQ^{-1} est :

$$(1\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} = (\ell_1\ \ \ell_2\ \ \ell_3\ \ \ell_4)$$

Comme on a $M = QDQ^{-1}$, alors $Q^{-1}M = DQ^{-1}$ et les deux premières lignes de ces matrices sont égales, ce qui donne :

$$\left(\frac{1}{9}\ell_2 \quad \ell_1 + \frac{4}{9}\ell_2 + \frac{4}{9}\ell_3 \quad \frac{4}{9}\ell_2 + \frac{4}{9}\ell_3 + \ell_4 \quad \frac{1}{9}\ell_3\right) = (\ell_1 \quad \ell_2 \quad \ell_3 \quad \ell_4)$$

On trouve alors : $\begin{cases} \ell_2 = 9\ell_1 \\ \ell_1 - \dfrac{5}{9}\ell_2 + \dfrac{4}{9}\ell_3 = 0 \\ \dfrac{4}{9}\ell_2 - \dfrac{5}{9}\ell_3 + \ell_4 = 0 \\ \ell_3 = 9\ell_4 \end{cases}$, système équivalent à : $\begin{cases} \ell_2 = 9\ell_1 \\ \ell_1 - 5\ell_1 + 4\ell_4 = 0 \\ 4\ell_1 - 5\ell_4 + \ell_4 = 0 \\ \ell_3 = 9\ell_4 \end{cases}$.

On en déduit : $\begin{cases} \ell_2 = 9\ell_1 \\ \ell_1 = \ell_4 \\ \ell_1 = \ell_4 \\ \ell_3 = 9\ell_4 \end{cases}$.

Conclusion :

$$\boxed{\ell_1 = \ell_4 \text{ et } \ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4}$$

b) On sait que $Q^{-1}Q = I$, ce qui s'écrit (avec le peu que l'on connaisse de ces matrices) :

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit en identifiant les termes en haut à gauche : $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = 1$.

En injectant les relations $\ell_1 = \ell_4$ et $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$, on obtient : $20\ell_4 = 1$

Finalement :

$$\boxed{\ell_4 = \frac{1}{20}}$$

10) On a $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} D^n\right)Q^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a maintenant : $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = Q\left(\lim\limits_{n\to+\infty} D^n\right)Q^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} M^n = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \end{pmatrix}}$$

11) a) • On a $X(\Omega)=[\![0,3]\!]$.

• Réaliser $(X=0)$, c'est ne tirer que des boules noires donc $(X=0)=N_1\cap N_2\cap N_3$, et avec la formule des probabilités composées, on a :

$$P(X=0)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$$

• Réaliser $(X=1)$, c'est tirer une boule blanche et deux boules noires donc $(X=1)=(B_1\cap N_2\cap N_3)\cap(N_1\cap B_2\cap N_3)\cap(N_1\cap N_2\cap B_3)$, et toujours avec la formule des probabilités composées :

$$P(X=1)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}+\frac{3}{20}+\frac{3}{20}=\frac{9}{20}$$

• Réaliser $(X=2)$, c'est tirer une boule noire et deux boules blanches donc $(X=2)=(N_1\cap B_2\cap B_3)\cap(B_1\cap N_2\cap B_3)\cap(B_1\cap B_2\cap N_3)$ et on trouve cette fois : $P(X=2)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}+\frac{3}{20}+\frac{3}{20}=\frac{9}{20}$.

• Réaliser $(X=3)$, c'est ne tirer que des boules blanches donc $(X=3)=B_1\cap B_2\cap B_3$, et avec la formule des probabilités composées, on a :

$$P(X=3)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$$

Pour résumer, la loi de X est donnée par :

$$\boxed{P(X=0)=P(X=3)=\frac{1}{20}\ \text{ et }\ P(X=1)=P(X=2)=\frac{9}{20}}$$

b) Pour vérifier que $\begin{pmatrix}P(X=0)\\P(X=1)\\P(X=2)\\P(X=3)\end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tM$, associé à la valeur propre 1, on calcule ${}^tM\begin{pmatrix}P(X=0)\\P(X=1)\\P(X=2)\\P(X=3)\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\,{}^tM\begin{pmatrix}1\\9\\9\\1\end{pmatrix}$, ce qui donne :

$${}^tM\begin{pmatrix}P(X=0)\\P(X=1)\\P(X=2)\\P(X=3)\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}0&1/9&0&0\\1&4/9&4/9&0\\0&4/9&4/9&1\\0&0&1/9&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\9\\9\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}1\\9\\9\\1\end{pmatrix}$$

Conclusion : $\begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tM$, associé à la valeur propre 1

c) Avec la notation de l'énoncé, la loi de X_n est donnée par $L_n = \left(P(X_n=0)\ \ P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\right)$ et il faut se souvenir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $L_n = L_0\, M^n$.
Comme X_0 est la variable certaine égale à 3 (il y a trois boules blanches dans l'urne U avant le premier tirage), on a : $L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
De plus, d'après le résultat de la question 1), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \lim_{n\to+\infty} \left(L_0\, M^n\right) = L_0 \lim_{n\to+\infty} M^n$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \frac{1}{20} L_0 \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc bien, en prenant élément par élément :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n=0) = \frac{1}{20} = P(X=0)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n=1) = \frac{9}{20} = P(X=1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n=2) = \frac{9}{20} = P(X=2)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n=3) = \frac{1}{20} = P(X=3)$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (X_n) \text{ converge en loi vers } X}$$

12) En notant $\pi = \begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$, la question 11) a permis de montrer que π est vecteur propre de ${}^tM$, associé à la valeur propre 1, ce qui s'écrit ${}^tM\,\pi = \pi$. En transposant, on trouve alors ${}^t\pi M = {}^t\pi$, ce qui montre que ${}^t\pi$ est un état stable de la chaîne de Markov étudiée. Par conséquent, comme le réel f est la fréquence de passage du mobile sur l'état 0, c'est donc, pour n assez grand, une valeur approchée de la probabilité $P(X=0)$, c'est-à-dire que f est proche de $\frac{1}{20}$.

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option scientifique

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2016

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.

• Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (troisième exercice et problème).

La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.

• Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet bien adapté au public concerné, ne comportant pas trop de parties particulièrement difficiles, mais quelques questions où seuls les bons candidats ont pu tirer leur épingle du jeu en montrant leur capacité à mener un calcul compliqué à son terme ainsi que leur faculté à raisonner sur des situations abstraites.

Description du sujet :

L'exercice 1 proposait l'étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, où f désignait la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$. La deuxième question demandait d'interpréter des commandes `Scilab` dont l'affichage laissait penser que la suite était divergente

• Cet exercice, jugé facile par les correcteurs, a permis à tous les candidats, ou presque, de gagner quelques points.

• Notons tout de même que quelques candidats ont des problèmes pour le calcul de la dérivée de f ou pour citer correctement les conditions d'application du théorème de la bijection (ce dernier étant énoncé « comme en terminale »).

L'exercice 2, portant sur la partie algèbre linéaire du programme, proposait d'établir que si un endomorphisme *f* de $\mathbb{R}^n$ annulait un polynôme vérifiant $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$, alors on avait :

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$$

On commençait par étudier deux exemples puis le cas général pour finir.

• Cet exercice, assez théorique, a permis aux candidats les mieux formés de parfaitement faire la différence. Toutefois, les correcteurs ont pu mesurer à quel point les connaissances de très nombreux candidats sont fragiles, concernant les objets liés au cours d'algèbre linéaire (cours pas maîtrisé pour certains).

• Beaucoup de candidats ont écrit $(f - Id)^2 \in \text{Ker}(f)$, ce qui n'a aucun sens.

L'exercice 3 portant sur les parties "estimation" et "fonctions de deux variables" du programme, avait pour objectif d'estimer conjointement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi normale.

• Cet exercice a été abordé avec des fortunes diverses, certains candidats n'ayant visiblement que très peu de connaissances sur cette partie portant exclusivement sur le programme de seconde année. C'est l'exercice le moins bien réussi de cette épreuve.

• De très nombreux candidats sont rapidement submergés par les calculs de dérivées partielles, certains, assez nombreux, ignorant tout des propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

• Le jury rappelle que les notations de Monge et le signe de $rt - s^2$ ne sont plus au programme de mathématiques des classes préparatoires ECS.

Le problème, portant sur le programme d'algèbre et de probabilité, proposait l'étude d'une chaîne de Markov à 4 états.

La dernière question proposait une simulation informatique de la situation.

• La plupart des candidats n'ont que peu abordé le problème, peut-être par manque de temps ou à cause d'une mauvaise gestion de leur temps. Cela dit, il n'est globalement pas très bien réussi par les candidats qui l'abordent.

• La justification de probabilités conditionnelles élémentaires (liées à un échange aléatoire de boules entre deux urnes) a paru insurmontable à de nombreux candidats.

Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3758 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 11,073 sur 20 (sensiblement la même que l'année dernière) et l'écart type vaut 5,821 (très légèrement inférieur à celui de l'année dernière).

• 35,4% des candidats, contre 33,8% l'année dernière, ont une note strictement inférieure à 8 (parmi eux, 12,8% ont une note inférieure à 4).

• 22,1% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage sensiblement égal à celui de 2015 qui était de 21%).

• 25% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage inférieur de presque deux points à celui de 2015 qui était lui-même inférieur de deux points à celui de 2014).

Conclusion :

Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu'ils font. Le fossé entre les aspirations du programme et la réalisation sur le « terrain » semble s'être élargi, une fois encore, cette année, mais heureusement pas pour les bons et très bons candidats.

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées et bien rédigées mais il reste, en assez grand nombre, des candidats qui rendent pratiquement un brouillon, proposent des copies sales et raturées, et truffent leur copie d'abréviations non officielles : les correcteurs n'apprécient pas du tout et n'ont alors aucune compassion pour ces candidats qui bien évidemment s'exposent à des sanctions.

Un nombre non négligeable de candidats restent adeptes des réponses floues : il faut savoir que ce type de réponse est sanctionné et que l'absence d'argument ou le manque de précision rend la réponse irrecevable.
La mauvaise maîtrise des techniques de base et des calculs élémentaires reste une constante et semble même s'aggraver pour un nombre non négligeable de candidats. Il serait bien que les futurs candidats investissent un peu de leur temps sur ces deux points.

Il semble que l'investissement en informatique ait été un peu plus intense que les années précédentes, ce qui est très bon signe (le langage Scilab semblant plaire aux candidats) puisqu'il y avait, comme d'habitude, pas mal de points à glaner sur ces questions, et ceci sans y passer énormément de temps.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.