CONCOURS PREMASTER EDHEC

SAMEDI 23 MARS 2024

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte 3 exercices

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

A l'issue de chaque composition écrite, tout candidat est tenu sous peine d'élimination, de remettre au surveillant une copie (même blanche, qui sera alors signée). La seule responsabilité du candidat est engagée dans le cas contraire. Tout candidat sortant avant la fin des épreuves doit obligatoirement remettre le sujet en même temps que sa copie.

Exercice 1

Partie 1 : quelques intégrales

On considère les 5 intégrales suivantes :

$$u_1=\int_0^{\pi/2}\cos(t)\,\mathrm{d}t\,,\ v_1=\int_0^{\pi/2}\sin(t)\,\mathrm{d}t\,,\ u_2=\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t\,,\ v_2=\int_0^{\pi/2}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t\,,\ w=\int_0^{\pi/2}\cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Calculer u_1, v_1 et w.

2) a) Donner la valeur de u_2+v_2.

   b) Montrer grâce à un changement de variable que $u_2=v_2$, puis en déduire la valeur de u_2 et v_2.

Partie 2 : étude d'une fonction de 2 variables réelles

3) Justifier que l'on définit correctement une fonction f de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en posant :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,,\ f(x,y)=\int_0^{\pi/2}\left(1-x\cos(t)-y\sin(t)\right)^2\mathrm{d}t$$

4) a) Exprimer $f(x,y)$ comme combinaison linéaire de u_1, v_1, u_2, v_2 et w.

   b) Écrire explicitement $f(x,y)$ en fonction de x et y.

5) a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ puis calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

   b) En déduire le seul point critique (a,b) de f sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

6) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

   b) Montrer qu'effectivement, f présente en (a,b) un extremum local noté m dont on précisera la nature (minimum ou maximum).

   c) Donner la valeur de m.

7) a) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, développer $\left(x+\dfrac{2}{\pi}y-\dfrac{4}{\pi}\right)^2+\dfrac{\pi^2-4}{\pi^2}\left(y-\dfrac{4}{\pi+2}\right)^2+\dfrac{2(\pi^2+2\pi-16)}{\pi(\pi+2)}$.

   b) Calculer $\dfrac{4}{\pi}f(x,y)$ puis conclure que l'extremum trouvé à la question précédente est global.

Exercice 2

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire à densité

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ est convergente et donner sa valeur.

2) On considère la fonction f définie par : $\forall x\in\mathbb{R}\,,\ f(x)=\dfrac{1}{2\left(1+|x|\right)^2}$.

   a) Vérifier que f est paire.

   b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et qu'elle est égale à 1.

   c) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère maintenant une variable aléatoire X telle que $X(\Omega)=\mathbb{R}$ et qui admet f pour densité.

   d) On note F la fonction de répartition de X. Déterminer $F(x)$ pour tout réel x, selon que $x\geq 0$ ou $x<0$.

   e) La variable X possède-t-elle une espérance ?

Partie 2 : étude de deux variables aléatoires construites à partie de X

3) On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note G sa fonction de répartition.

   a) Donner la valeur de $G(x)$ pour $x<0$.

   b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.

   c) En déduire que : $\forall x \geq 0$, $G(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

4) On pose $T = \lfloor Y \rfloor + 1$, où $\lfloor Y \rfloor$ désigne la partie entière de Y, ce qui signifie que, pour tout entier naturel k, on a : $(\lfloor Y \rfloor = k) = (k \leq Y < k+1)$.

On admet également que T est une variable aléatoire.

   a) Dans quel ensemble T prend-elle ses valeurs ?

   b) Établir que la loi de T est donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(T=n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Partie 3 : construction d'une variable aléatoire ayant même loi que T

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine *O*.
Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0).
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse $k-1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), alors, à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse k avec la probabilité $\dfrac{k}{k+1}$, ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+1}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note A_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce point à l'instant n. On a donc $A_0 = 0$.
On note U l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ) et on admet que U est une variable aléatoire. On convient que U prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en *O*. Par exemple, si les abscisses successives sont : $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 0$, $A_5 = 0$, $A_6 = 1$, alors $(U=4)$ est réalisé.

5) a) Déterminer, pour tout entier naturel $i \geq 1$, la probabilité conditionnelle $P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = i)$.

   b) Déterminer, pour tout entier naturel $i \geq 1$, la probabilité conditionnelle $P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = 0)$.

6) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(U=n)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables A_i (on distinguera les cas $n=1$ et $n \geq 2$).

7) Déduire des questions précédentes, sans chercher à trouver la loi des variables A_i, que U a même loi que *T*.

Exercice 3

Partie 1 : étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$

On désigne par N un entier naturel au moins égal à 3.
On considère l'application φ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_N[X]$ associe $\varphi(P)$ défini par :

$$\varphi(P) = (X - X^2)P'' + (1-2X)P'$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.

2) a) Écrire la matrice A de φ dans la base canonique $(e_0, e_1, ..., e_N)$ de $\mathbb{R}_N[X]$.

b) En déduire que φ est diagonalisable et donner la dimension de chaque sous-espace propre.

c) Quelles sont les dimensions de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$?

Partie 2 : construction d'une famille de polynômes

On considère les familles $(U_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ et $(L_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies pour tout n de $[\![0,N]\!]$, par $U_n = (X - X^2)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{n!}U_n^{(n)}$, où $U_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de U_n. On a donc $U_0 = L_0 = e_0$.

3) a) Montrer que, pour tout n de $[\![0,N]\!]$, L_n est un polynôme de degré n.

b) Donner explicitement les polynômes L_1, L_2 et L_3.

4) a) Justifier que, pour tout n de $[\![0,N]\!]$, on a : $(X - X^2)U_n' = n(1-2X)U_n$.

b) En dérivant $n+1$ fois cette relation, montrer que L_n est vecteur propre de φ et donner la valeur propre associée.

Partie 3 : étude des racines des polynômes L_n

Dans cette partie, on suppose que n n'est pas nul.

5) a) Pour tout réel x, en écrivant $U_n(x) = x^n(1-x)^n$, montrer que, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, on a :

$$U_n^{(k)}(x) = k!\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}(-1)^{k-i}x^{n-i}(1-x)^{n-k+i}$$

b) Donner, pour tout k de $[\![0,n-1]\!]$, les valeurs de $U_n^{(k)}(0)$ et de $U_n^{(k)}(1)$.

c) En déduire que $\int_0^1 L_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

d) Donner les valeurs de $L_n(0)$ et de $L_n(1)$

6) On rappelle la propriété suivante : f désignant une fonction continue et de signe constant sur $[0,1]$, si $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors on a, pour tout t de $[0,1]$, $f(t) = 0$.

Montrer que L_n admet au moins une racine d'ordre impair sur $]0,1[$, c'est-à-dire une racine en laquelle L_n change de signe.

7) On note p le nombre de racines d'ordre impair de L_n sur $]0,1[$ et $x_1, x_2, ..., x_p$ ces racines.

On pose $Q(x) = \prod_{j=1}^{p}(x - x_j)$ et $J = \int_0^1 Q(t)L_n(t)\,\mathrm{d}t$.

On suppose, dans cette question, que $p < n$.

a) Montrer que : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $n!J = (-1)^k\int_0^1 Q^{(k)}(t)U_n^{(n-k)}(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire que $J = 0$.

b) Montrer que la fonction $t \mapsto Q(t)L_n(t)$ garde un signe constant sur $[0,1]$ et que $Q(1)L_n(1) \neq 0$. En déduire que $J \neq 0$.

8) Établir, pour conclure, que L_n possède n racines simples appartenant toutes à $]0,1[$.

CONCOURS EDHEC

CONCOURS PRÉ MASTER

SAMEDI 23 MARS 2024

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CORRIGÉ

EDHEC BUSINESS SCHOOL

Exercice 1

Partie 1

1) $u_1=\int_0^{\pi/2}\cos(t)\,\mathrm{d}t=[\sin(t)]_0^{\pi/2}=1$.

$v_1=\int_0^{\pi/2}\sin(t)\,\mathrm{d}t=[-\cos(t)]_0^{\pi/2}=1$.

$w=\int_0^{\pi/2}\cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\sin(t)^2}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}$.

2) a) $u_2+v_2=\int_0^{\pi/2}(\cos^2(t)+\sin^2(t))\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}1\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

2) b) La fonction $t\mapsto\frac{\pi}{2}-t$ est de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut effectuer le changement de variable $x=\frac{\pi}{2}-t$ dans l'intégrale $u_2=\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui donne :

$$u_2=\int_{\pi/2}^{0}\sin^2(x)(-\mathrm{d}x)=\int_0^{\pi/2}\sin^2(x)\,\mathrm{d}x=v_2$$

Comme $u_2+v_2=\frac{\pi}{2}$ et $u_2=v_2$, on en déduit $u_2=v_2=\frac{\pi}{4}$.

3) La fonction $t\mapsto(1-x\cos t-y\sin t)^2$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc l'intégrale définissant $f(x,y)$ existe et la fonction f est ainsi bien définie.

4) a) On a $f(x,y)=\int_0^{\pi/2}(1-x\cos t-y\sin t)^2\,\mathrm{d}t$, d'où, en développant :

$$f(x,y)=\int_0^{\pi/2}(1+x^2\cos^2(t)+y^2\sin^2(t)-2x\cos(t)-2y\sin(t)+2xy\cos(t)\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégration et avec les notations de l'énoncé, on obtient :

$$f(x,y)=\frac{\pi}{2}+x^2u_2+y^2v_2-2xu_1-2yv_1+2xy\,w$$

4) b) En remplaçant par les valeurs obtenues aux premières questions, on trouve :

$$f(x,y)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x^2+\frac{\pi}{4}y^2-2x-2y+xy$$

5) a) La fonction f est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Après calcul, on trouve $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\pi}{2}x-2+y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\pi}{2}y-2+x$.

5) b) Les points critiques de f sont les points annulant le gradient de f, donc les couples (a,b) solutions du système $\begin{cases}\frac{\pi}{2}a-2+b=0\\ \frac{\pi}{2}b-2+a=0\end{cases}$ qui est équivalent, avec $L_2\leftarrow L_2-L_1$, à $\begin{cases}\frac{\pi}{2}a-2+b=0\\ \frac{\pi}{2}(b-a)-(b-a)=0\end{cases}$.

La deuxième équation se résume à $a=b$ car $\frac{\pi}{2}\neq 1$ et en injectant ceci dans la première équation, on trouve : $a=b=\frac{2}{\frac{\pi}{2}+1}=\frac{4}{\pi+2}$.

En conclusion, le seul point critique de f est (a,a), avec $a=\frac{4}{\pi+2}$.

6) a) La fonction f est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=1$.

6) b) La hessienne de f en (a,a) est donc $\nabla^2 f(a,a)=\begin{pmatrix}\pi/2 & 1\\ 1 & \pi/2\end{pmatrix}$ et ses valeurs propres λ sont les solutions de $(\lambda-\pi/2)^2-1=0$, c'est-à-dire $\lambda_1=\frac{\pi}{2}+1$ et $\lambda_2=\frac{\pi}{2}-1$ qui sont toutes les deux strictement positives, ce qui montre que f possède un minimum local m en son point critique.

6) c) La valeur de m s'obtient en calculant $m=f(a,a)=f\left(\frac{4}{\pi+2},\frac{4}{\pi+2}\right)$.
On trouve successivement :
$m=f\left(\frac{4}{\pi+2},\frac{4}{\pi+2}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{4}{\pi+2}\right)^2+\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{4}{\pi+2}\right)^2-2\times\frac{4}{\pi+2}-2\times\frac{4}{\pi+2}+\left(\frac{4}{\pi+2}\right)^2$.
$m=f\left(\frac{4}{\pi+2},\frac{4}{\pi+2}\right)=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\times\left(\frac{4}{\pi+2}\right)^2-\frac{16}{\pi+2}=\frac{\pi}{2}+\frac{8}{\pi+2}-\frac{16}{\pi+2}=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi+2}$.
Finalement :

$$m=\frac{\pi^2+2\pi-16}{2(\pi+2)}$$

7) a) En développant les carrés, on trouve :
$\left(x+\frac{2}{\pi}y-\frac{4}{\pi}\right)^2+\frac{\pi^2-4}{\pi^2}\left(y-\frac{4}{\pi+2}\right)^2+\frac{2(\pi^2+2\pi-16)}{\pi(\pi+2)}=2+x^2+y^2-\frac{8}{\pi}x-\frac{8}{\pi}y+\frac{4}{\pi}xy$.

7) b) On remarque que l'on a $2+x^2+y^2-\frac{8}{\pi}x-\frac{8}{\pi}y+\frac{4}{\pi}xy=\frac{4}{\pi}f(x,y)$.

On en déduit $\left(x+\frac{2}{\pi}y-\frac{4}{\pi}\right)^2+\frac{\pi^2-4}{\pi^2}\left(y-\frac{4}{\pi+2}\right)^2+\frac{2(\pi^2+2\pi-16)}{\pi(\pi+2)}=\frac{4}{\pi}f(x,y)$. Comme $\pi>2$, on a $\frac{\pi^2-4}{\pi^2}>0$ donc, pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a $\left(x-\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}y\right)^2+\frac{\pi^2-4}{\pi^2}\left(y-\frac{4}{\pi+2}\right)^2\geq 0$.
On en déduit $\frac{4}{\pi}f(x,y)\geq\frac{2(\pi^2+2\pi-16)}{\pi(\pi+2)}$, ce qui donne : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y)\geq\frac{\pi^2+2\pi-16}{2(\pi+2)}$.
On a donc :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y)\geq m$$

Ceci prouve que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Exercice 2

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire à densité

1) Pour tout réel x positif, on a :

$\int_0^x \frac{1}{(t+1)^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{t+1}\right]_0^x = 1-\frac{1}{x+1}$. Comme $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=1$, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t+1)^2}\mathrm{d}t$ converge et qu'elle vaut 1.

2) a) La fonction f est bien définie (dénominateur ne s'annulant pas) sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0, et la fonction valeur absolue est paire donc f est paire.

2) b) On a, d'après la question 1), $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t+1)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et, par parité de f, la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est assurée. De plus, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\times\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

2) c) • La fonction f est bien définie et positive sur $\mathbb{R}_-^*$ car elle y est nulle et elle est bien définie et positive sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et quotient bien défini de nombres strictement positifs.

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ car elle y est nulle et elle est l'inverse de la fonction $x \mapsto 2(1+|x|)^2$ continue sur $\mathbb{R}$ (et qui ne s'annule pas) donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Pour finir, on a vu que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

En conclusion, f est une densité.

2) d) Par définition, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

• Si $x<0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2(1-t)^2}\mathrm{d}t = \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_A^x = \frac{1}{2(1-x)}$.

• Si $x\geq 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2(1-t)^2}\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{1}{2(1+t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t}\right]_0^x = 1-\frac{1}{2(1+x)}$.

2) e) On a l'équivalent $x f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$, et, par référence à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ qui est divergente, on a la preuve que $\int_1^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ diverge, et ainsi, X ne possède pas d'espérance.

Partie 2 : étude de deux variables aléatoires construites à partie de X

3) a) On a $Y=|X|$ donc Y prend des valeurs positives. On a ainsi $G(x)=0$ si $x<0$.

3) b) Pour tout réel x positif ou nul, on a : $G(x) = P(Y\leq x) = P(-x\leq X\leq x) = F(x)-F(-x)$.

3) c) Comme $x \geq 0$, on a $F(x) = 1 - \dfrac{1}{2(1+x)}$ et comme $-x \leq 0$, on a $F(-x) = \dfrac{1}{2(1+x)}$. En remplaçant, on obtient :

$$\forall x \geq 0,\ G(x) = 1 - \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(1+x)} = 1 - \frac{1}{(1+x)} = \frac{x}{1+x}$$

4) a) Comme Y prend des valeurs positives, $T = \lfloor Y \rfloor + 1$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

4) b) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$(T = n) = (\lfloor Y \rfloor + 1 = n) = (\lfloor Y \rfloor = n - 1) = (n - 1 \leq Y < n)$$

Comme Y est à densité, on en déduit : $P(T = n) = G(n) - G(n-1)$.

Comme $n-1$ et n sont dans $\mathbb{N}$ donc dans $\mathbb{R}_+$, on obtient, grâce à la question 3c) :

$$P(T = n) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - (n+1)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{n(n+1)}$$

On trouve bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(T = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Partie 3 : construction d'une variable aléatoire ayant même loi que T

5) a) D'après la règle du voyage, on a :

$$P_{(A_{i-1} = i-1)}(A_i = i) = \frac{i}{i+1} \text{ (avancée d'une case vers la droite)}$$

5) b) Toujours d'après la règle du voyage, on a :

$$P_{(A_{i-1} = i-1)}(A_i = 0) = \frac{1}{i+1} \text{ (retour à l'origine)}$$

6) On a $(U = 1) = (A_1 = 0)$, et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$(U = n) = (A_1 = 1) \cap (A_2 = 2) \cap \ldots \cap (A_{n-1} = n - 1) \cap (A_n = 0)$$

7) On en déduit $P(U = 1) = P(A_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$, puis comme le mobile peut aller vers la droite pendant ses $n-1$ premiers déplacements, la probabilité $P\left(\bigcap\limits_{1 \leq j \leq n-1} [A_j = j]\right)$ est différente de 0 et ainsi, on peut utiliser la formule des probabilités composées, qui donne, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$P(U = n) = P(A_1 = 1) \times P_{(A_1 = 1)}(A_2 = 2) \times \ldots \times P_{\bigcap\limits_{1 \leq j \leq n-2} (A_j = j)}(A_{n-1} = n - 1) \times P_{\bigcap\limits_{1 \leq j \leq n-1} (A_j = j)}(A_n = 0)$$

On remarque que la position du mobile à un instant donné ne dépend que de sa position à l'instant précédent, d'où $P_{\bigcap\limits_{1 \leq j \leq i-1} (A_j = j)}(A_i = i) = P_{(A_{i-1} = i-1)}(A_i = i)$ et $P_{\bigcap\limits_{1 \leq j \leq n-1} (A_j = j)}(A_n = 0) = P_{(A_{n-1} = n-1)}(A_n = 0)$, ce qui permet de simplifier :

$$P(U = n) = P(A_1 = 1) \times P_{(A_1 = 1)}(A_2 = 2) \times \ldots \times P_{(A_{n-2} = n-2)}(A_{n-1} = n - 1) \times P_{(A_{n-1} = n-1)}(A_n = 0)$$

En remplaçant les probabilités grâce à la règle de déplacement du mobile, on obtient :

$$P(U = n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1}$$

Après simplification, on obtient :

$$P(U=n)=\frac{1}{n(n+1)}$$

Ceci étant encore valable pour $n=1$ car $P(U=1)=\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times 2}$, on peut conclure :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(U=n)=\frac{1}{n(n+1)}$$

Conclusion : U a même loi que T.

Exercice 3

Partie 1 : étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$

1) La linéarité de φ provient de la linéarité de la dérivation. De plus, somme et produit de polynômes sont des polynômes. De plus, si $P\in\mathbb{R}_N[X]$ alors $P''\in\mathbb{R}_{N-2}[X]$ donc $(X-X^2)P''$ est dans $\mathbb{R}_N[X]$, et de même, $P'\in\mathbb{R}_{N-1}[X]$ donc $(1-2X)P'$ est aussi dans $\mathbb{R}_N[X]$. Ainsi, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.

2) a) • On a $\varphi(e_0)=0$ et $\varphi(e_1)=(1-2X)\times 1=e_0-2e_1$.

• Ensuite, pour tout k de $[\![2,N]\!]$, on a :

$\varphi(e_k)=(X-X^2)k(k-1)X^{k-2}+(1-2X)kX^{k-1}=k^2X^{k-1}-k(k+1)X^k$.

On en déduit :

$$\varphi(e_k)=k^2e_{k-1}-k(k+1)e_k$$

La matrice de φ dans la base $(e_0,e_1,\dots,e_N)$ est donc :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & (0) \\ & -2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & k^2 & & \\ & & & -k(k+1) & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots & N^2 \\ & & & & & -N(N+1) \end{pmatrix}$$

2) b) La matrice A est triangulaire donc ses valeurs propres (qui sont aussi celles de φ) sont ses éléments diagonaux, c'est-à-dire les $-k(k+1)$ pour k dans $[\![0,N]\!]$. La fonction $x\mapsto -x(x+1)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc les valeurs propres de φ sont 2 à 2 distinctes, ce qui prouve que φ est diagonalisable (car φ est un endomorphisme d'un espace de dimension $N+1$ et φ possède $N+1$ valeurs propres 2 à 2 distinctes). De plus, ses $N+1$ sous-espaces propres sont chacun de dimension 1.

2) c) La dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est égale à 1 d'après ce qui précède (puisque $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0) et celle de $\mathrm{Im}(\varphi)$ est égale à N (grâce au théorème du rang).

Partie 2 : construction d'une famille de polynômes

3) a) U_n est un polynôme de degré $2n$ donc L_n est un polynôme de degré n (dérivée n-ième d'un polynôme de degré $2n$).

3) b) $U_1 = X - X^2$ donc $L_1 = U_1' = 1 - 2X$.

$U_2(x) = (X - X^2)^2 = X^2 - 2X^3 + X^4$ donc $L_2 = \dfrac{1}{2}U_2'' = 1 - 6X + 6X^2$.

$U_3 = (X - X^2)^3 = X^3 - 3X^4 + 3X^5 - X^6$ donc $L_3 = \dfrac{1}{6}U_3^{(3)} = 1 - 12X + 30X^2 - 20X^3$.

4) a) Pour tout n de $[\![1,N]\!]$, on a $U_n' = n(1-2X)(X-X^2)^{n-1}$ et on en déduit :

$$(X-X^2)U_n' = n(1-2X)(X-X^2)^n = n(1-2X)U_n$$

Cette relation est aussi valable pour $n=0$ car elle donne $0=0$.

4) b) On va dériver $n+1$ fois cette relation grâce à la formule de Leibniz. Notons f_n et g_n les fonctions polynomiales respectivement définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = (x-x^2)U_n'(x) \text{ et } g_n(x) = n(1-2x)U_n(x)$$

On obtient d'une part :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n+1)}(x) = (x-x^2)U_n^{(n+2)}(x) + (n+1)(1-2x)U_n^{(n+1)}(x) + \tbinom{n+1}{2}(-2)U_n^{(n)}(x)$$

D'autre part :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n^{(n+1)}(x) = n(1-2x)U_n^{(n+1)}(x) + n(n+1)(-2)U_n^{(n)}(x).$$

Ces deux quantités sont égales puisque $f_n(x) = g_n(x)$ et on obtient après simplifications :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x-x^2)U_n^{(n+2)}(x) + (1-2x)U_n^{(n+1)}(x) + n(n+1)U_n^{(n)}(x) = 0$$

Ceci s'écrit encore, après division par $n!$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x-x^2)L_n''(x) + (1-2x)L_n'(x) = -n(n+1)L_n(x)$$

On a donc $(X-X^2)L_n'' + (1-2X)L_n' = -n(n+1)L_n$, c'est-à-dire $\varphi(L_n) = -n(n+1)L_n$, et on peut conclure que L_n est vecteur propre de φ associé à la valeur propre $-n(n+1)$.

Partie 3 : étude des racines des polynômes L_n

5) a) En écrivant $U_n(x) = x^n(1-x)^n$ et en se permettant de noter $(x^n)^{(i)}$ la dérivée i-ième de la fonction $x \mapsto x^n$, la formule de Leibniz donne :

$$U_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \tbinom{k}{i} (x^n)^{(i)} \left((1-x)^n\right)^{(k-i)}$$

Comme k appartient à $[\![0,n]\!]$, on a :

$$U_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \tbinom{k}{i} \frac{n!}{(n-i)!}x^{n-i} \times \frac{n!}{(n-k+i)!}(-1)^{k-i}(1-x)^{n-k+i}$$

En écrivant le coefficient binomial avec des factorielles, on a :

$$U_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!}\frac{n!}{(n-i)!}x^{n-i} \times \frac{n!}{(n-k+i)!}(-1)^{k-i}(1-x)^{n-k+i}$$

On réarrange :

$$U_n^{(k)}(x) = k!\sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{i!(n-i)!}x^{n-i} \times \frac{n!}{(k-i)!(n-k+i)!}(-1)^{k-i}(1-x)^{n-k+i}$$

On trouve bien :

$$U_n^{(k)}(x) = k!\sum_{i=0}^{k} \tbinom{n}{i}\tbinom{n}{k-i}(-1)^{k-i}x^{n-i}(1-x)^{n-k+i}$$

5) b) Les réels 0 et 1 sont racines d'ordre n de U_n donc, pour tout k de $[\![0,n-1]\!]$, on a $U_n^{(k)}(0)=0$ et $U_n^{(k)}(1)=0$.

Remarque : on pouvait obtenir $U_n^{(k)}(0)=0$ et $U_n^{(k)}(1)=0$ avec la question 5a). En effet, si k appartient à $[\![0,n-1]\!]$, le facteur x^{n-i} s'annule en 0 donc $U_n^{(k)}(0)=0$. De même, si k appartient à $[\![0,n-1]\!]$, les facteurs $(1-x)^{n-k+i}$ s'annulent en 1 donc $U_n^{(k)}(1)=0$.

5) c) $\int_0^1 L_n(t)\,dt=\frac{1}{n!}\int_0^1 U_n^{(n)}(t)\,dt=\frac{1}{n!}\left[U_n^{(n-1)}(t)\right]_0^1=\frac{1}{n!}\left(U_n^{(n-1)}(1)-U_n^{(n-1)}(0)\right)=0$, d'après 5a).

5) d) Par exemple avec 5a), on obtient :

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}U_n^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}(-1)^{n-i}x^{n-i}(1-x)^i$$

En évaluant en 0, seul le terme d'indice n subsiste, d'où : $L_n(0)=1$.

En évaluant en 1, seul le terme d'indice 0 subsiste, d'où : $L_n(1)=(-1)^n$.

6) Si L_n n'avait pas de racine d'ordre impair sur $]0,1[$, il serait de signe constant sur $[0,1]$.

Comme L_n est continue et comme $\int_0^1 L_n(t)\,dt=0$, on aurait $L_n(t)=0$ pour tout t de $[0,1]$, ce qui est faux car $L_n(0)=1$. Par conséquent, L_n admet au moins une racine d'ordre impair sur $]0,1[$ puisque, ni 0, ni 1 ne sont racines.

7) a) Par récurrence sur k :

- Pour $k=0$, l'égalité proposée est correcte puisqu'elle donne $J=J$.
- Soit k de $[\![0,n-1]\!]$ tel que : $n!J=(-1)^k\int_0^1 Q^{(k)}(t)U_n^{(n-k)}(t)\,dt$

En intégrant par parties, comme les fonctions $U_n^{(n-k-1)}$ et $Q^{(k)}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$ car polynomiales, on trouve :

$$n!J=(-1)^k\left[Q^{(k)}(t)U_n^{(n-k-1)}(t)\right]_0^1-(-1)^k\int_0^1 Q^{(k+1)}(t)U_n^{(n-k-1)}(t)\,dt$$

Comme $n-k-1\in[\![0,n-1]\!]$, alors, avec la question 5b), il ne reste que :

$$n!J=-(-1)^k\int_0^1 Q^{(k+1)}(t)U_n^{(n-k-1)}(t)\,dt=(-1)^{k+1}\int_0^1 Q^{(k+1)}(t)U_n^{(n-k-1)}(t)\,dt$$

- On a montré par récurrence que :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ n!J=(-1)^k\int_0^1 Q^{(k)}(t)U_n^{(n-k)}(t)\,dt$$

Pour finir, avec $k=n$, on obtient $n!J=(-1)^n\int_0^1 Q^{(n)}(t)U_n(t)\,dt$. Comme $p<n$, la dérivée n-ième de Q est nulle donc $J=0$.

7) b) Comme $x_1,x_2,\ldots,x_p$ sont les racines d'ordre impair de L_n sur $]0,1[$, on peut écrire, pour tout t de $[0,1]$, $L_n(t)=\prod_{j=1}^{p}(t-x_j)^{2\alpha_j+1}\times R(t)$, où R est un polynôme ne changeant pas de signe sur $]0,1[$ donc ne changeant pas de signe sur $[0,1]$ par continuité.

Par définition de Q, on a donc $Q(t)L_n(t)=\prod_{j=1}^{p}(t-x_j)^{2\alpha_j+2}\times R(t)$, ce qui prouve que la fonction $t\mapsto Q(t)L_n(t)$ garde un signe constant sur $[0,1]$.

Comme $x_1,x_2,\dots,x_p$ appartiennent à $]0,1[$, on a $Q(1)\neq 0$ et $L_n(1)=(-1)^n\neq 0$ donc $Q(1)L_n(1)\neq 0$

Par contraposition du rappel fait par l'énoncé, la fonction $t\mapsto Q(t)L_n(t)$ garde un signe constant sur $[0,1]$, est continue sur $[0,1]$, et $Q(1)L_n(1)\neq 0$ donc $J\neq 0$.

8) Les résultats précédents sont irrecevables puisque l'on a, à la fois, $J=0$ et $J\neq 0$.

L'hypothèse $p<n$ est donc absurde et on en déduit que $p\geq n$. Mais L_n est de degré n donc L_n a au plus n racines, ce qui prouve que $p=n$. Par conséquent, L_n possède n racines simples, toutes éléments de $]0,1[$.

CONCOURS PREMASTER EDHEC

RAPPORT DE CORRECTION 2024

Epreuve de MATHEMATIQUES

Présentation de l'épreuve.

L'épreuve, longue comme d'habitude, comportait trois exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse et probabilités. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté, sélectif et exigent tout en respectant scrupuleusement le programme.

- L'exercice 1, portant sur le programme d'analyse, demandait dans la partie 1 le calcul de $u_1=\int_0^{\pi/2}\cos(t)\,\mathrm{d}t$, $v_1=\int_0^{\pi/2}\sin(t)\,\mathrm{d}t$, $u_2=\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$, $v_2=\int_0^{\pi/2}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$, $w=\int_0^{\pi/2}\cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

La deuxième partie proposait l'étude de la fonction f de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y)=\int_0^{\pi/2}\big(1-x\cos(t)-y\sin(t)\big)^2\mathrm{d}t$$

On établissait que cette fonction présentait un minimum global atteint en un seul point.

- L'exercice 2 portait sur le programme de probabilités.

Dans la partie 1, on considérait la fonction f définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$.

On vérifiait que c'était une densité d'une certaine variable aléatoire *X*.

La deuxième partie étudiait la variable $Y=|X|$ puis la variable $T=\lfloor Y\rfloor+1$.

Dans la troisième partie, on construisait une variable aléatoire liée au déplacement d'un mobile sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine *O* puis on vérifiait que cette nouvelle variable avait même loi que *T*.

- L'exercice 3, portant sur le programme d'algèbre linéaire proposait, dans la première partie, l'étude de l'application φ qui à tout polynôme *P* de $\mathbb{R}_N[X]$ associe $\varphi(P)=(X-X^2)P''+(1-2X)P'$. On prouvait que φ était un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_N[X]$.

Dans la deuxième partie, on construisait une famille de polynômes $(L_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ en posant $L_n=\dfrac{1}{n!}U_n^{(n)}$, où $U_n=(X-X^2)^n$. On montrait alors que L_n était vecteur propre de φ associé à la valeur propre $-n(n+1)$.

Dans la partie 3, on établissait que les polynômes L_n sont scindés à racines simples, ces racines étant toutes dans $]0,1[$.

Statistiques.
Cette épreuve a réuni 291 candidats (contre 239 l'année dernière).

- La moyenne obtenue à cette épreuve est de 11,13 sur 20, légèrement supérieure à celle de l'année dernière (plus 0,27 point).
- L'écart-type d'environ 4,37 (0,7 point au-dessous de l'année dernière).
- La médiane est, quant à elle, égale à 11,1 (0,7 point au-dessous de celle de l'année dernière).
- 5,5 % des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4, le pourcentage était de 9,7 l'année dernière.
- 32,3 % des candidats ont entre 8 et 12 (4,1 points de plus que l'année dernière).
- 5,8 % des candidats obtiennent une note supérieure ou égale à 18 (4,7 points de moins que l'année dernière).

Analyse des copies.
Les correcteurs constatent que les copies sont, dans l'ensemble, agréables à lire, en revanche, sur le plan de la rigueur, les arguments mathématiques nécessaires aux conclusions sont, assez souvent, passés sous silence.
D'un point de vue académique, ils notent que le niveau est plus homogène que l'année dernière, avec certes, moins d'excellents candidats, mais une moyenne supérieure et moins de candidats dont les copies sont creuses.
Les correcteurs trouvent l'ensemble d'un niveau honorable et se réjouissent que de plus en plus de candidats aient travaillé les probabilités.

Commentaires par exercice.

Exercice 1

- Quelques candidats invoquent la continuité de $(x,y)\mapsto\left(1-x\cos(t)-y\sin(t)\right)^2$ au lieu d'invoquer celle de $t\mapsto\left(1-x\cos(t)-y\sin(t)\right)^2$ pour établir l'existence de $\int_0^{\pi/2}\left(1-x\cos(t)-y\sin(t)\right)^2\mathrm{d}t$.
- Une erreur de concentration qui a eu de lourdes conséquences : $\int_0^{\pi/2}1\,\mathrm{d}t=1\ldots$
- Il est dommage de ne pas voir la simplification du quotient $\dfrac{8-4\pi}{4-\pi^2}$ et de s'enfermer ensuite dans des calculs pratiquement insurmontables.
- Les correcteurs ont constaté de nombreuses erreurs dans le développement de $\left(1-x\cos(t)-y\sin(t)\right)^2$ qui, elles aussi, ont eu d'importantes conséquences.
- Une omission dans un certain nombre de copies : des candidats n'ont calculé que deux dérivées partielles d'ordre 2, en oubliant les dérivées "croisées".

Exercice 2

- Il est dommage de se référer à l'intégrale de Riemann $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ pour prouver la convergence de $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$: l'intégrale $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ est divergente alors que celle de départ est convergente.
- L'imparité de la fonction $t\mapsto t\,f(t)$ ne permet pas d'affirmer que la variable X possède une espérance nulle : ici, X n'avait pas d'espérance.
- Il n'est pas rigoureux du tout d'écrire $\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x$, même si, par la suite, on s'adapte et on trouve la bonne fonction de répartition.

Dans un autre ordre d'idées, il n'était pas bien d'écrire que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2(1+|t|)^2}$ admet pour primitive la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-1}{1+|t|}$!

- Quelques candidats ne savent pas exprimer la quantité $P(n-1 \leq Y \leq n)$ à l'aide de la fonction de répartition G de Y, ce qui devrait pourtant être connu par tous.

Exercice 3

- Il ne fallait pas oublier de vérifier que $\varphi(P)$ était un polynôme avant de s'intéresser à son degré.
- On envoie un signal pas très positif en ne simplifiant pas $-k(k-1)-2k$ …
- Les bêtises traditionnelles sont toujours présentes mais sur un plus petit nombre de copies que par le passé, concernant la diagonalisation : « la matrice est triangulaire donc diagonalisable », « la matrice n'a pas d'élément diagonal nul donc elle est diagonalisable » et enfin, le must « la matrice est symétrique » alors qu'elle ne l'est pas.
- Constater que la matrice de φ possède une colonne nulle ne suffit pas à affirmer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est de dimension 1 (même si c'était le cas ici).
- Les correcteurs ont vu quelques fausses récurrences (où l'on n'utilise pas l'hypothèse de récurrence pendant l'hérédité) pour montrer que L_n est un polynôme de degré n.

Conclusion.

L'épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a, comme d'habitude de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.

Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d'une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point du programme : les trois "compartiments" de ce programme (analyse, algèbre linéaire et probabilités) sont essentiels pour une bonne continuation des études à l'EDHEC.